

Linear Algebra

선형대수학

Chapter 1

연립일차방정식

1.1 연립일차방정식 ~ 1.5 활용

Department of Control & Instrumentation Engineering
Pukyong National University, Busan, Korea

pnj@pknu.ac.kr

선형대수학 Course Contents

Chapter 1 연립일차방정식

Chapter 2 행렬

Chapter 3 행렬식

Chapter 4 n 차원 실벡터

Chapter 5 벡터공간

Chapter 6 선형변환

Chapter 7 고윳값과 고유벡터

Chapter 8 복소벡터공간

Chapter 1. 연립일차방정식

1.1 연립일차방정식

1.2 연립일차방정식의 풀이

1.3 가우스 소거법

1.4 동차연립일차방정식

1.5 연립일차방정식의 활용

학습목표

- ▶ 연립일차방정식의 뜻과 **해·해집합**의 개념을 이해한다.
- ▶ 연립방정식을 **첨가행렬**로 나타내고 기본 행 연산으로 해를 구한다.
- ▶ 가우스 소거법과 가우스-조르단 소거법을 이해한다.
- ▶ 동차연립일차방정식의 해(자명해/자명하지 않은 해)를 이해한다.
- ▶ 교통망·전기회로·곡선맞춤 등 **활용** 문제를 모델링한다.

일차방정식 — 기본 용어와 정의

방정식은 미지수를 포함하는 등식, 그 **해**(solution)는 등식을 만족시키는 미지수 값, **해집합**(solution set)은 모든 해의 모임이다. **방정식을 푼다**는 것은 해집합을 구하는 것이다. 모든 항이 (상수)×(미지수 하나) 꼴, 즉 아래 (1.1) 형태로 쓸 수 있는 방정식을 **일차방정식**(linear equation)이라 한다.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (1.1)$$

$a_1, \dots, a_n$: 계수(coefficient), b : 상수항, $x_1, \dots, x_n$: 미지수

▶ 일차식의 조건 — 각 항이 (상수)×(미지수 하나의 1제곱)

미지수끼리의 곱(xy), 거듭제곱(x^2), 초월함수($\ln x$, e^x), 역수($1/x$)가 하나라도 섞이면 일차가 아니다.

[직관] 일차방정식의 그래프는 **직선**($n=2$)·**평면**($n=3$)·... — 휘지 않는 **평평한(flat)** 대상이다.

예제 1-1 일차방정식의 판별

다음 방정식 중 일차방정식인 것을 찾고, 그것을 풀어라.

(a) $2x - 1 = 7$ (b) $x - 3xy + y = 4$ (c) $7x - 3y = 9 \ln x$

(d) $3x - 5y = 1$ (e) $-2e^x + x - 3 = y$ (f) $2x - 8y + 10z = 3$

▶ 일차방정식 — (a), (d), (f)

모든 항이 (상수)×(미지수 하나)이다.

▶ 일차가 아님

- ▶ (b) $-3xy$: 미지수끼리의 곱.
- ▶ (c) $\ln x$, (e) e^x : 초월함수.

▶ 풀이 (해집합)

- ▶ (a) $x = 4$ — 유일해.
- ▶ (d) $\{(x, y) \mid 3x - 5y = 1\}$: 직선 — 무수히 많은 해.
- ▶ (f) $\{(x, y, z) \mid 2x - 8y + 10z = 3\}$: 평면 — 무수히 많은 해.

[판별 요령] 미지수를 감싸는 $\ln$, $e^{(\cdot)}$, $(\cdot)^2$ 또는 미지수 **둘의 곱**이 하나라도 있으면 일차가 아니다.

연립일차방정식 — 정의와 일반형

미지수 $x_1, \dots, x_n$ 과 상수 a_{ij} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$), b_i 로 이루어진 **유한개의 일차방정식의 모임을 연립일차방정식**(system of linear equations)이라 한다.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
 \end{array} \tag{1.2}$$

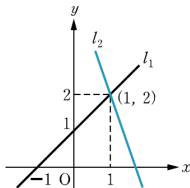
▶ 예 — 미지수 2개 / 3개

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = -4 \end{cases}$$

[직관] 연립방정식을 푼다 = 여러 제약을 **동시에** 만족하는 점(들)을 찾는 것 = 제약들의 **교집합**.

해집합의 유형 — 유일해 · 무수히 많은 해 · 해 없음

미지수 2개인 연립방정식의 각 식은 평면 위 직선이다. 두 직선의 위치 관계가 해의 개수를 결정한다.

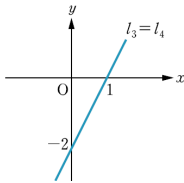


$$l_1 : x - y = -1$$

$$l_2 : 8x + 3y = 14$$

[그림 1-1] 한 점에서 교차

⇒ 유일해 (1, 2)

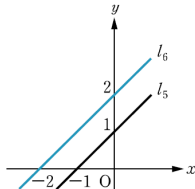


$$l_3 : 2x - y = 2$$

$$l_4 : 6x - 3y = 6$$

[그림 1-2] 두 직선이 일치

⇒ 무수히 많은 해



$$l_5 : -x + y = 1$$

$$l_6 : -x + y = 2$$

[그림 1-3] 평행, 교점 없음

⇒ 해 없음

[읽는 법] 직선의 교점 = 해. 만나면 1개(유일), 겹치면 무한(무수), 평행이면 없음.

$l_4 = 3l_3$ (전체 비례)이므로 일치한다.

소거가 남기는 것 — 갈림길은 남은 계수

미지수가 2개인 두 식에서 한 미지수를 소거하면 남는 것은
(계수) × (남은 미지수) = (상수) 꼴의 식 **하나**이다.

▶ 첫 식은 고정하고 아래 식만 바꿔 본다

$$(a) \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y = 2$$

$$\text{계수 } 2 \neq 0 \Rightarrow y = 1$$

유일해

$$(b) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

$$\text{계수 } 0, \text{ 상수 } 0$$

무수히 많은 해

$$(c) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = -1$$

$$\text{계수 } 0, \text{ 상수 } \neq 0$$

해 없음

[핵심] 소거의 결과가 처음부터 $0 = (\text{상수})$ 인 것이 아니다. 두 식의 좌변(계수)이 **비례할 때만** 미지수가 통째로 사라진다. 이때 상수항까지 같은 비율이면 $0 = 0$ (무수히 많은 해), 아니면 $0 = (0 \text{ 이 아닌 상수})$ (해 없음)이다.

대수적 관점 — 소거가 남기는 세 결말

모순: $0 = c$ ($c \neq 0$)	$\Rightarrow$ 해 없음
항등식: $0 = 0$ (자유변수 존재)	$\Rightarrow$ 무수히 많은 해
남은 미지수가 모두 결정됨	$\Rightarrow$ 유일해

▶ 왜 "정확히 2개" 같은 경우는 없는가

두 직선의 교점은 0개·1개·무한개뿐 — 그 중간은 직선의 평행함 때문에 불가능하다.

[기하 $\leftrightarrow$ 대수] 평행 = 모순 $0=c$ / 일치 = 항등식 $0=0$ / 교차 = 유일 결정.

예제 1-2 해의 존재성 판정

다음 각 연립일차방정식이 해를 갖는지, 갖는다면 **유일해**인지 **무수히 많은 해**인지 판정하라.

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x \quad \quad + z = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases}$$

▶ (a) 무수히 많은 해

$$R_1 - R_2 : y = -1$$

z 가 자유변수
 $\Rightarrow$ 해가 무수히 많다.

▶ (b) 유일해

$$R_1 + R_2 : 2x = 2$$

$x = 1, y = 0$ 으로
 유일하게 결정.

▶ (c) 해 없음

$$3R_1 : 3x - 3y = 3$$

$3 \neq 1$ 이므로 모순
 $\Rightarrow$ 해 없음.

[정리] 계수는 비례하는데 상수항만 어긋나면 해 없음. 모순이 없으면서 서로 비례하지 않는 식의 개수가 미지수보다 적으면 무수히 많은 해, 그 외에는 유일해.

Chapter 1. 연립일차방정식

1.1 연립일차방정식

1.2 연립일차방정식의 풀이

1.3 가우스 소거법

1.4 동차연립일차방정식

1.5 연립일차방정식의 활용

가감법(elimination) — 원리

가감법은 두 식을 변끼리 더하거나 빼서 한 미지수를 소거(elimination)하고, 남은 식으로 나머지 변수를 구하는 방법이다.

▶ 두 미지수의 예

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 & \textcircled{1} \\ x - 2y = -4 & \textcircled{2} \end{cases}$$

▶ ① + ② 로 y 소거 후 대입

$$(3x + 2y) + (x - 2y) = 12 - 4 = 8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2,$$

$$3(2) + 2y = 12 \Rightarrow y = 3 \quad \therefore \boxed{(x, y) = (2, 3)} \quad (1.3)$$

[직관] 가감법 = 계수를 맞춰 지우기. 없앨 변수의 계수의 절댓값을 같게 만든 뒤, 부호가 같으면 빼고 다르면 더하면 그 변수가 사라진다.

예제 1-3 가감법으로 3원 연립방정식 풀기

다음 연립일차방정식을 가감법으로 풀어라.

$$2x + y + z = 8 \quad \textcircled{1}, \quad x + 2y + z = 6 \quad \textcircled{2}, \quad x + y + 2z = 2 \quad \textcircled{3}$$

▶ 두 식씩 빼서 변수 줄이기

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : x - y = 2 \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} : y - z = 4 \quad \textcircled{5}$$

▶ ④·⑤ 를 ① 에 대입

$$x = y + 2, \quad z = y - 4$$

$$2(y + 2) + y + (y - 4) = 8$$

$$\Rightarrow 4y = 8 \Rightarrow y = 2$$

▶ 역대입으로 마무리

$$x = y + 2 = 4, \quad z = y - 4 = -2$$

$$(x, y, z) = (4, 2, -2) \quad (1.4)$$

[검산]

$$2(4) + 2 - 2 = 8$$

$$4 + 4 - 2 = 6$$

$$4 + 2 - 4 = 2$$

세 식 모두 성립.

대입법(substitution) — 원리

대입법은 한 식을 한 미지수에 대해 정리한 뒤, 이를 **다른 식에 대입**하여 미지수를 하나 소거하는 방법이다.

▶ 두 미지수의 예

$$\begin{cases} y = 2x - 1 & \textcircled{1} \\ 3x + y = 9 & \textcircled{2} \end{cases}$$

▶ ① 을 ② 에 대입하여 y 소거 후 역대입

$$3x + (2x - 1) = 9 \Rightarrow 5x - 1 = 9 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2,$$

$$y = 2(2) - 1 = 3 \quad \therefore \boxed{(x, y) = (2, 3)} \quad (1.5)$$

[직관] 대입법 = 한 변수를 식으로 바꿔치기. 변수 하나를 다른 변수의 표현으로 바꾸면 미지수가 한 개 줄어든다.

예제 1-4 대입법 적용과 두 방법의 비교

다음 연립일차방정식을 대입법으로 풀어라.

$$x = -2y - 3 \quad \textcircled{1}, \quad 2x - 3y = 8 \quad \textcircled{2}$$

▶ ① 을 ② 에 대입

$$\begin{aligned} 2(-2y - 3) - 3y &= 8 \\ -7y - 6 &= 8 \\ \Rightarrow y &= -2 \end{aligned}$$

▶ ① 에 역대입

$$x = -2(-2) - 3 = 1$$

$$(x, y) = (1, -2) \quad (1.6)$$

[가감법 vs 대입법]

가감법: 계수를 맞춰 더/빼기 —
계수가 정돈된 식에 유리.

대입법: 한 변수를 정리해 바꿔치기
— 한 변수가 이미 분리된 식에 유리.

공통 한계: 미지수가 3개 이상이면
조합·대입이 급격히 번거로워짐.

연립방정식과 첨가행렬(augmented matrix)

미지수가 많아지면 변수 이름보다 **계수와 그 위치**가 본질이다. 일반적인 $m \times n$ 연립일차방정식

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1.7)$$

의 계수와 상수를 **배열**만으로 나타내면 다음과 같다.

계수행렬 $\mathbf{A}$ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$	첨가행렬 $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ $\left[\begin{array}{ccc c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$
---	---

[왜 유리한가] 변수 기호를 반복하지 않고 **수의 배열**만 다루므로, 가감·대입을 **행 연산**이라는 기계적 절차로 통일할 수 있다 (다음 절: 가우스 소거법).

예제 1-5 연립방정식과 첨가행렬의 상호 변환

(a) 연립방정식을 **첨가행렬**로, (b) 첨가행렬을 **연립방정식**으로 나타내라.

▶ (a) 연립 → 첨가행렬

$$\begin{cases} x & & - & z & = & -1 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 5y & - & 2z & = & -2 \end{cases}$$

빠진 항의 계수는 0 으로 채운다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

▶ (b) 첨가행렬 → 연립

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{array} \right]$$

각 열을 x, y 의 계수로 되돌린다.

$$\begin{cases} x & + & 2y & = & 1 \\ -2x & + & 3y & = & -3 \end{cases}$$

[읽는 법]

열 = 변수, 세로선 오른쪽 = 상수항.

Chapter 1. 연립일차방정식

1.1 연립일차방정식

1.2 연립일차방정식의 풀이

1.3 가우스 소거법

1.4 동차연립일차방정식

1.5 연립일차방정식의 활용

기본 행 연산 — 세 연산과 두 가지 표기 (1/2)

연립방정식에 가하는 세 가지 **기본 식 연산**은 첨가행렬(augmented matrix)의 행에 그대로 대응하며, 이를 **기본 행 연산**(elementary row operation)이라 한다.

$$\boxed{E_{ij}, \quad E_i(c), \quad E_{ij}(c)} \quad (1.8)$$

▶ 행에 이름을 붙이면, 같은 연산을 두 가지로 쓸 수 있다

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{lll} E_{ij} & \longleftrightarrow & R_i \leftrightarrow R_j & \text{교환} \\ E_i(c) & \longleftrightarrow & R_i \rightarrow c R_i & \text{상수배 } (c \neq 0) \\ E_{ij}(c) & \longleftrightarrow & R_j \rightarrow R_j + c R_i & \text{더하기} \end{array}$$

$E_{ij}(c)$ 에서 앞 첨자 i 는 주는 행, 뒤 첨자 j 는 바뀌는 행이다.

[해집합 보존] 세 연산은 모두 가역이라 방정식을 다시 쓰는 것일 뿐 **해집합은 그대로**다.
유한 번의 기본 행 연산으로 이어지는 두 행렬을 **행 동치**(row equivalent)라 한다.

기본 행 연산 — 세 연산의 예 (2/2)

같은 첨가행렬에 세 연산을 한 번씩 적용한다. 화살표 위는 E 표기, 아래는 R 표기다.

▶ ① 교환 (swap)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{E_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

▶ ② 상수배 (scaling)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2]{E_2(\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

▶ ③ 다른 행에 더하기 (replacement)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1]{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

행 사다리꼴 (Row Echelon Form, REF)

CONCEPT 정의

- (1) 성분이 모두 0인 행(**영행**)은 행렬의 맨 아래에 모인다.
- (2) 각 행에서 처음 나타나는 0이 아닌 성분은 1이다. 이 1을 그 행의 **선행성분**(leading entry, **피벗** pivot)이라 한다.
- (3) 아래 행의 선행성분은 위 행의 선행성분보다 **더 오른쪽**에 위치한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

빨간 1 = 선행성분(피벗). 계단 모양으로 오른쪽·아래로 내려간다. 이것을 **계수행렬**로 보면 피벗 없는 열(2, 5 열)이 **자유변수**에 대응한다.

[주의] REF는 **유일하지 않다** — 소거 순서에 따라 여러 REF가 나온다.
(다음의 RREF는 유일.)

기약 행 사다리꼴 (Reduced Row Echelon Form, RREF)

CONCEPT 정의

- (4) 행렬이 우선 **REF**이다 (조건 (1)~(3) 모두 만족).
- (5) 어떤 행의 선행성분(피벗)을 포함하는 **열의 나머지 성분은 모두 0**이다.

RREF ✓

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF 이지만 RREF 아님

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5열의 선행성분 **1**(3행) 위에 -2 가 남음
 $\Rightarrow$ 조건 (5) 위반.

[핵심] 어떤 행렬이든 **RREF**는 **유일(unique)**하다. 위·아래를 모두 청소한 **표준형**이다.

예제 1-6 REF·RREF 판별

다음 행렬 중에서 **REF**인 것과 **RREF**인 것을 각각 찾아라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[힌트] 먼저 REF 세 조건(영행 위치·선행성분 1·계단)을 점검하고, 통과한 것만 조건 (5)로 RREF를 가린다.

REF·RREF 판별 — 풀이

SOLUTION 1-6

▶ REF 여부 — 세 조건 점검

- ▶ A, B, C, F, H : 선행성분 모두 1 + 계단형 + 영행이 맨 아래 $\Rightarrow$ **REF**.
- ▶ D : 영행이 중간(2행) $\rightarrow$ **(1)** 위반. E : 3행 선행성분이 3($\neq 1$) $\rightarrow$ **(2)** 위반.
- ▶ G : 3행·4행 선행성분이 **같은 열**(3열) $\rightarrow$ **(3)** 위반. $\Rightarrow D, E, G$ 는 REF 아님.

▶ RREF 여부 — REF 중에서 조건 (5)

- ▶ C, F, H : 피벗 열의 나머지 성분이 모두 0 $\Rightarrow$ **RREF**. (H 는 영행열이라 확인할 선행성분이 없어 조건이 **자명하게** 성립한다.)
- ▶ A, B : 피벗 위에 0이 아닌 성분이 남음 $\Rightarrow$ RREF 아님(REF까지만).

[읽는 법] $RREF \subset REF$. RREF는 위·아래를 모두 청소한 가장 단순한 형태.

REF vs RREF — 같은 연립, 어디까지 청소하는가

▶ 같은 연립방정식을 첨가행렬로

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

REF — 아래만 청소

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

아래에서 위로 역대입이 필요

$$z = 3 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 1$$

$$[A | b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array} \right]$$

RREF — 위·아래 모두 청소

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

계산 없이 그대로 읽는다

$$x = 1, y = 2, z = 3$$

[차이] REF는 피벗 **아래만** 0으로 만든다 — 해를 얻으려면 역대입이 남는다. RREF는 피벗 **위까지** 0으로 만들어 마지막 열이 곧 해가 된다.

예제 1-7 가우스 소거법 — 전진소거 (1/2)

가우스 소거법으로 다음 연립일차방정식을 풀어라.

$$x + y + 2z = 9, \quad 2x + 4y - 3z = 1, \quad 3x + 6y - 5z = 0$$

▶ 첨가행렬로 옮기고 1열 아래를 0으로 (전진소거)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1]{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1]{E_{13}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

[전진소거] 목표는 **피벗 아래를 0** 으로 만드는 것이다($E_{12}(-2) = 1$ 행의 -2 배를 2행에 더함). 피벗 자리가 0 이면 아래 행과 **교환**(E_{ij})한 뒤 진행한다.

가우스 소거법 — 전진소거 (2/2)

SOLUTION 1-7

(1/2)의 마지막 첨가행렬에서 이어간다.

▶ 피벗을 1로 만들고, 그 아래를 0으로

$$\xrightarrow[\substack{E_2(\frac{1}{2}) \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{E_{23}(-3) \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right]$$

▶ 마지막 피벗을 1로 $\Rightarrow$ 행 사다리꼴(REF) 완성

$$\xrightarrow[\substack{E_3(-2) \\ R_3 \rightarrow -2R_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

[체크] 이 예에서는 피벗이 대각에 놓인다. 피벗이 모두 1 이고 그 아래가 모두 0 $\Rightarrow$ REF 도달. 이제 역대입만 남았다.

가우스 소거법 — 역대입 (back substitution)

SOLUTION 1-7

REF에 대응하는 연립방정식은 다음과 같다:

$$x + y + 2z = 9, \quad y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}, \quad z = 3.$$

▶ 아래에서 위로 대입

$$z = 3$$

$$y = \frac{7}{2}z - \frac{17}{2} = \frac{21}{2} - \frac{17}{2} = 2$$

$$x = 9 - y - 2z = 9 - 2 - 6 = 1$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (1.9)$$

▶ 검산

원식에 대입:

$$1 + 2 + 6 = 9 \quad \checkmark$$

$$2 + 8 - 9 = 1 \quad \checkmark$$

$$3 + 12 - 15 = 0 \quad \checkmark$$

[직관]

전진소거로 **사다리꼴**(이 예에서는 **상삼각**)만 남기고, 역대입으로 $z \rightarrow y \rightarrow x$ 순서로 되짚는다.

가우스 소거법 vs 가우스-조르단 소거법

- ▶ 가우스 소거법: 첨가행렬 $\rightarrow$ REF $\rightarrow$ 역대입으로 해를 구한다.
- ▶ 가우스-조르단 소거법: 첨가행렬 $\rightarrow$ RREF까지 완전 소거 $\rightarrow$ 해를 바로 읽는다.
- ▶ 같은 예제의 REF에서 계속 소거 (위쪽도 청소)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{31}(-2), E_{32}(\frac{7}{2}), E_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$E_{31}(-2): R_1 \rightarrow R_1 - 2R_3, \quad E_{32}(\frac{7}{2}): R_2 \rightarrow R_2 + \frac{7}{2}R_3, \quad E_{21}(-1): R_1 \rightarrow R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3 \text{ 을 즉시 읽는다.}$$

[정리] 두 방법의 해는 동일. 차이는 어디까지 청소하느냐 — REF(가우스, 역대입 필요)
vs RREF(가우스-조르단, 역대입 불필요).

Chapter 1. 연립일차방정식

1.1 연립일차방정식

1.2 연립일차방정식의 풀이

1.3 가우스 소거법

1.4 동차연립일차방정식

1.5 연립일차방정식의 활용

동차연립일차방정식의 정의

상수항이 모두 0인 연립일차방정식을 **동차연립일차방정식**(homogeneous system)이라 한다. 즉, 오른쪽 변이 전부 0 인 다음 꼴이다.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

이를 행렬로 쓰면 계수행렬 A 와 미지수벡터 x 에 대해

$$\boxed{Ax = 0} \quad (1.10)$$

이며, 첨가행렬의 **마지막 열은 항상 0** 이다: $[A \mid 0]$.

[기하] 각 식 $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ 은 **원점을 지나**는 도형이다 (계수가 모두 0 은 아닐 때, 미지수 2개면 직선, 3개면 평면). 해집합은 그 도형들의 교집합이므로 **항상 원점 0** 을 포함한다.

자명한 해와 자명하지 않은 해

동차계 $Ax = 0$ 에 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 을 대입하면 좌변이 그대로 0 이 되어 항상 성립한다. 따라서 $x = 0$ 은 언제나 해이며, 이를 **자명한 해**(trivial solution)라 한다.

$$Ax = 0 \implies x = 0 \text{ 은 항상 해} \quad (1.11)$$

$x = 0$ 이 아닌 해를 **자명하지 않은 해**(nontrivial solution)라 한다.
동차계의 해는 다음 두 경우뿐이다.

- ▶ **경우 1.** 자명한 해만 갖는다 $\Rightarrow$ 해가 **유일**(원점 하나).
- ▶ **경우 2.** 자명하지 않은 해도 갖는다 $\Rightarrow$ **무수히 많은** 해.

무수히 많은 해를 가지려면?

[핵심] 동차계는 언제나 해를 가진다(적어도 자명한 해). 상수항이 0 이 아닌 일반 연립방정식과 달리 “해가 없는” 경우는 결코 없다. 유일한 관심사는 “**자명하지 않은 해가 있는가**”이다.

자명하지 않은 해의 존재 조건

첨가행렬을 행 소거해도 마지막 열은 계속 0 이므로, “0 = (0이 아닌 수)” 같은 모순 행은 결코 나오지 않는다.

$$[A | 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{행 소거}} [R | 0]$$

소거 후 **피벗의 개수**를 A 의 **랭크(rank)** $\text{rank } A$ 라 하고, 나머지 $n - \text{rank } A$ 개의 변수는 값을 자유롭게 정하는 **자유변수(free variable)**가 된다. 자유변수가 하나라도 있으면 그것을 0 이 아닌 값으로 둘 수 있으므로 자명하지 않은 해가 생긴다.

자명하지 않은 해 존재 $\iff \text{rank } A < n$ (자유변수 $n - \text{rank } A \geq 1$)

(1.12)

[따름정리] 식의 수가 미지수보다 적으면 $m < n \Rightarrow \text{rank } A \leq m < n$ 이므로, **반드시 자명하지 않은 해**(무수히 많은 해)를 갖는다.

예제 1-8 자명한 해 vs 자명하지 않은 해

다음 동차연립일차방정식이 **자명하지 않은 해**를 갖는지 판정하고
해집합을 구하라.

(a) $3x - y = 0, \quad x + 3y = 0$

(b) $2x - y = 0, \quad 6x - 3y = 0$

▶ (a) 행 소거

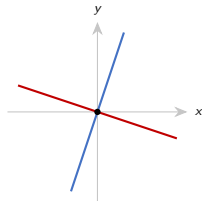
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{array} \right]$$

$-10y = 0 \Rightarrow y = 0$, 대입하면 $x = 0$.

피벗이 2개이므로

$$\text{rank } \mathbf{A} = 2 = n \Rightarrow \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ (자명한 해뿐)}} \quad (1.13)$$



[그림 1-4] 서로 다른 두 직선

[읽는 법]

두 직선이 원점에서만 만남 $\Rightarrow$
해는 원점 하나.

예제 1-8 자명한 해 vs 자명하지 않은 해 (2/2)

SOLUTION 1-8

▶ (b) 행 소거

두 번째 식은 $6x - 3y = 3(2x - y)$ 로 첫 식의 상수배이므로, 두 식은 **같은 직선**을 나타낸다.

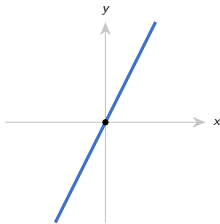
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

피벗은 1개이므로 $\text{rank } \mathbf{A} = 1 < 2 = n$,
자유변수 $2 - 1 = 1$ 개.

$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$ 이고 $x = t$ 로 두면

$$\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

$t \neq 0$ 이면 자명하지 않은 해 — 무수히 많다.



[그림 1-5] 두 식이 같은 직선

[읽는 법]

같은 직선 $\Rightarrow$
직선 전체가 해집합.

예제 1-9 자유변수 매개화와 벡터 해집합

다음 동차연립일차방정식의 해집합을 구하고, 해를 벡터로 표현하라.

▶ 연립방정식

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 \quad \quad \quad + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \quad = 0 \end{cases}$$

▶ 계수행렬

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

▶ 행 소거 (오른쪽 열은 항상 0 이므로 생략)

$$\mathbf{A} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

⇒ 피벗이 x_1, x_2, x_3 열에 3개 $\Rightarrow \text{rank } \mathbf{A} = 3, n = 4$:

$\text{자유변수 개수} = n - \text{rank } \mathbf{A} = 4 - 3 = 1$

예제 1-9 자유변수 매개화와 벡터 해집합 (2/2)

SOLUTION 1-9

▶ 역대입: 사다리꼴이 주는 식

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

자유변수 $x_4 = t$ 로 두면

$$x_3 = -x_4 = -t,$$

$$x_2 = -x_3 = t,$$

$$x_1 = -(x_2 + x_3 + x_4) = -t.$$

▶ 해의 기하·검산

[기하]

$\mathbb{R}^4$ 에서 방향 $(-1, 1, -1, 1)$ 을 갖는
원점을 지나는 직선
(차원 $= n - \text{rank } A = 1$).

[검산]

$t = 1$ 을 대입하면 세 식이 모두 0. ✓

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

Chapter 1. 연립일차방정식

1.1 연립일차방정식

1.2 연립일차방정식의 풀이

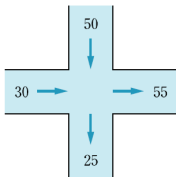
1.3 가우스 소거법

1.4 동차연립일차방정식

1.5 연립일차방정식의 활용

예제 1-10 활용 ① 도로 교통망 (1/2)

일방통행 도로망에서 각 교차로(노드)는 **진입 교통량의 합 = 진출 교통량의 합**을 만족한다. 아래 법원광장 도로망에서 내부 도로의 교통량 x, y, z, w 를 구하라. (단위: 대/시)



[그림 1-11] 한 교차로

진입 $30+50 = 80 =$ 진출 $55+25$

① : $x + y = 50$	② : $y + z = 80$
③ : $z + w = 50$	④ : $x + w = 20$

노드별 방정식 (진입 = 진출)



[그림 1-12] 법원광장 도로망

활용 ① 도로 교통망 — 가우스 소거 (2/2)

SOLUTION 1-10

▶ 첨가행렬로 옮겨 소거 (미지수 순서 x, y, z, w)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_1 + R_2 - R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

마지막 행이 $0 = 0 \Rightarrow \text{rank } A = 3 < 4 = n \Rightarrow$ 자유변수 w .

$\Rightarrow w$ 를 자유변수로 두고 역대입:

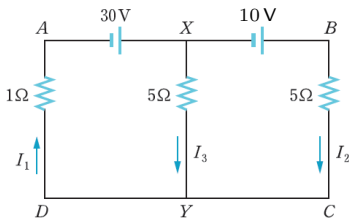
$$z = 50 - w, \quad y = 80 - z = 30 + w, \quad x = 50 - y = 20 - w$$

$$x = 20 - w, \quad y = 30 + w, \quad z = 50 - w, \quad (0 \leq w \leq 20)$$

[해석] 해가 무수히 많다. 유량은 음수가 될 수 없어 $x = 20 - w \geq 0$ 에서 $0 \leq w \leq 20$.
도로 하나(w)만 측정하면 나머지가 모두 정해진다.

예제 1-11 활용 ② 전기회로 (1/2)

키르히호프 법칙으로 회로를 해석한다. **KCL**(전류 보존): 노드로 들어온 전류의 합 = 나간 전류의 합. **KVL**(전압 법칙): 닫힌 경로에서 저항 전압강하의 합 = 기전력의 합. 전류 I_1, I_2, I_3 을 구하라.



[그림 1-15] 두 전원(30V, 10V)과

세 저항(1, 5, 5Ω)의 회로

▶ **KCL — 노드 X**

$$I_1 = I_2 + I_3$$

▶ **KVL — 좌 · 우 루프**

$$\begin{cases} I_1 + 5I_3 = 30 & (\text{좌: } 30\text{V}) \\ 5I_2 - 5I_3 = 10 & (\text{우: } 10\text{V}) \end{cases}$$

우 루프는 I_2 를 따라 내려가고 I_3 를 거슬러 올라가므로 부호가 반대다.

[모델링]

미지수 3개, 독립 식 3개 $\Rightarrow$ **유일해**를 기대한다.

활용 ② 전기회로 — 가우스 소거 (2/2)

SOLUTION 1-11

▶ 첨가행렬 (미지수 순서 I_1, I_2, I_3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 30 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{5} R_3}]{\quad} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 30 \\ 0 & 0 & -7 & -28 \end{array} \right]$$

⇒ 행 사다리꼴에서 역대입:

$$-7I_3 = -28 \Rightarrow I_3 = 4, \quad I_2 = 30 - 6I_3 = 6, \quad I_1 = I_2 + I_3 = 10$$

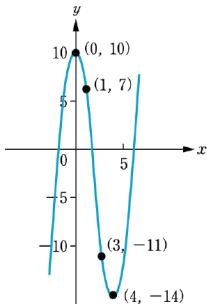
$$\boxed{I_1 = 10, \quad I_2 = 6, \quad I_3 = 4 \text{ (A)}}$$

[검산] KCL: $10 = 6 + 4 \checkmark$ KVL(좌): $1(10) + 5(4) = 30 \checkmark$ KVL(우):

$$5(6) - 5(4) = 10 \checkmark$$

예제 1-13 활용 ③ 곡선맞춤 (curve fitting)

네 점 $(0, 10)$, $(1, 7)$, $(3, -11)$, $(4, -14)$ 를 모두 지나는 3차곡선 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 의 계수를 구하라.



▶ 각 점 대입 → 반데르몽드 연립 (각 행 $= 1, x_i, x_i^2, x_i^3$)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -11 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & -14 \end{array} \right]$$

▶ 가우스 소거로 계수 결정

$$a_0 = 10, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = -6, \quad a_3 = 1$$

$$y = 10 + 2x - 6x^2 + x^3$$

[한 줄 정리] 현실 문제 → 미지수·제약 식별 → 연립일차방정식 → 가우스 소거. x 좌표가 서로 다른 n 개 점을 지나는 $(n-1)$ 차 이하의 다항식은 유일하다.

Thank you

*Dept. of Control and Instrumentation Engineering,
Pukyong National Univ., Busan, Korea.*

pnj@pknu.ac.kr