

Linear Algebra

선형대수학

Chapter 2

행렬

2.1 행렬과 행렬 연산 ~ 2.5 LU-분해

Department of Control & Instrumentation Engineering
Pukyong National University, Busan, Korea
pnj@pknu.ac.kr

선형대수학 Course Contents

Chapter 1 연립일차방정식

Chapter 2 행렬

Chapter 3 행렬식

Chapter 4 n 차원 실벡터

Chapter 5 벡터공간

Chapter 6 선형변환

Chapter 7 고윳값과 고유벡터

Chapter 8 복소벡터공간

Chapter 2. 행렬

2.1 행렬과 행렬 연산

2.2 행렬의 곱

2.3 역행렬

2.4 특별한 행렬

2.5 LU-분해

학습목표

- ▶ 행렬의 **정의**와 행렬 **연산의 성질**을 이해할 수 있다.
- ▶ 정사각행렬의 **역행렬**을 이해하고, 역행렬을 구할 수 있다.
- ▶ **특별한 행렬**(대칭·대각·삼각·멱영원 등)을 알고 그 성질을 이해할 수 있다.
- ▶ **LU-분해**를 이해하고, 이를 연립일차방정식 풀이에 활용할 수 있다.

행렬의 정의 — 배열, 크기, 성분

양의 정수 m, n 에 대하여 $m \times n$ 개의 실수를 직사각형 모양으로 배열한 것을 **행렬** (matrix)이라 한다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

▶ **크기**(size)는 $m \times n$, **성분**(entry) a_{ij} 는 row i 와 column j 의 교차.

▶ i 번째 **행벡터**(row vector) $[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$, j 번째 **열벡터**(column vector) $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$.

▶ $m = n$ 이면 n 차 **정사각행렬**(square matrix)이라 한다.

[직관] 행렬 = 수를 담은 표. 크기 $m \times n$ 은 row m 개와 column n 개를 뜻한다.
 $a_{11}, a_{22}, \dots$ 이 이루는 대각선이 **주대각선**(main diagonal)이다.

예제 2-1 행렬 읽기

행렬 $A = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -2 & 11 & -3 \\ 31 & -3 & 11 \end{bmatrix}$ 에 대하여 다음을 구하라.

- (a) 크기 (b) (2, 3) 성분 (c) 주대각선 성분
(d) 3번째 행벡터 (e) 1번째 열벡터

▶ 성분 읽기

- (a) 3 row 3 column $\Rightarrow$ 크기 3×3 (정사각행렬).
(b) $a_{23} = -3$ (row 2, column 3 의 성분).
(c) 주대각선 $a_{11}, a_{22}, a_{33} = 11, 11, 11$.

▶ 행벡터 · 열벡터 뽑기

- (d) 3번째 행벡터 $[31 \quad -3 \quad 11]$.

- (e) 1번째 열벡터 $\begin{bmatrix} 11 \\ -2 \\ 31 \end{bmatrix}$.

[읽는 법]

a_{ij} : 앞 첨자 = row,
뒤 첨자 = column.
주대각선의 합
 $11 + 11 + 11 = 33$.

특수한 행렬 — 영행렬과 단위행렬

▶ 영행렬 (zero matrix)

모든 성분이 0 인 행렬. 기호 $\mathbf{0}$ (필요하면 $\mathbf{0}_{m \times n}$).

$$\mathbf{0}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

▶ 단위행렬 (identity matrix)

주대각선 성분이 모두 1, 나머지는 모두 0 인 n 차 정사각행렬. 기호 $\mathbf{I}_n$.

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[미리보기] $\mathbf{0}$ 는 덧셈의 0, $\mathbf{I}_n$ 은 곱셈의 1 역할 ($\mathbf{I}_m \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}$, 2.2절에서 사용).

행렬의 상등 (equality)

두 행렬이 **상등**(equal)이라는 것은 **크기가 같고** 대응하는 모든 성분이 같다는 뜻이다.

$$\text{크기가 같을 때, } \mathbf{A} = \mathbf{B} \iff a_{ij} = b_{ij} \quad (\text{모든 } i, j)$$

▶ 예 — 미지수 결정

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ c+3d & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ 이 되도록 } a, b, c, d \text{ 를 정하면, 성분별로}$$

$$a-b=8, \quad b+c=1, \quad c+3d=7, \quad 2a-4d=6$$

$$\text{이 연립식을 풀면 } \boxed{a=5, \quad b=-3, \quad c=4, \quad d=1}.$$

[주의] 크기가 다르면 성분을 아무리 맞추어도 상등이 아니다. 상등은 **크기 일치**가 전제.

행렬의 합과 스칼라 배

크기가 같은 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$ 와 실수 k 에 대하여 합과 스칼라 배를 성분별 (entrywise)로 정의한다.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \quad (2.2)$$

$$k\mathbf{A} = [k a_{ij}]_{m \times n} \quad (2.3)$$

CONCEPT 정리 2-1

크기가 같은 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 와 실수 k, ℓ 에 대하여:

- (1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (2) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- (3) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$ (4) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$
- (5) $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$ (6) $(k + \ell)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + \ell\mathbf{A}$
- (7) $(k\ell)\mathbf{A} = k(\ell\mathbf{A})$

예제 2-2 합과 스칼라 배 계산

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 일 때 $A - 2B$ 를 구하라.

▶ 스칼라 배를 먼저

$$2B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 14 \\ 2 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

▶ 성분별로 빼기

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 2 - 0 & 3 - 4 & 4 - 14 \\ 1 - 2 & 2 - (-6) & 1 - 10 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -10 \\ -1 & 8 & -9 \end{bmatrix}}$$

⇒ 크기가 같은 두 행렬만 더하거나 뺄 수 있다. 여기서는 둘 다 2×3 .

행렬의 대각합 (trace) (1/2)

n 차 정사각행렬 $\mathbf{A}$ 의 **대각합**(trace)은 주대각선 성분의 합이다.

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

CONCEPT 정리 2-2

n 차 정사각행렬 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 와 실수 k 에 대하여:

(1) $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$

(2) $\text{tr}(k\mathbf{A}) = k \text{tr}(\mathbf{A})$

행렬의 대각합 (trace) (2/2)

▶ 확인 — 정리 2-2 (1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

이면 $\text{tr } \mathbf{A} = -1 + 3 + 0 = 2$, $\text{tr } \mathbf{B} = 1 + 0 - 6 = -5$.

$\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 의 주대각선은 $0, 3, -6$ 이므로

$$\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0 + 3 - 6 = -3 = 2 + (-5)$$

따라서 (1) 성립.

(추가) $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ 도 성립하며, 이는 2.2절의 곱과 함께 다룬다.

전치행렬 (transpose)

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 의 row 와 column 을 서로 바꾸어 만든 $n \times m$ 행렬을 A 의 전치행렬 (transpose)이라 하고 A^T 로 나타낸다.

$$A^T = [a'_{ij}]_{n \times m}, \quad a'_{ij} = a_{ji}$$

CONCEPT 정리 2-3

두 행렬 A, B 와 실수 k 에 대하여 ((2)는 크기가 같을 때, (4)는 정사각행렬일 때):

$$(1) (A^T)^T = A$$

$$(2) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(3) (kA)^T = kA^T$$

$$(4) \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

▶ 확인 (3),(4) — $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ 이므로 } (3A)^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} = 3A^T, \quad \text{tr}(A^T) = 1 + (-1) = 0 = \text{tr} A.$$

예제 2-3 전치행렬 구하기

다음 행렬의 전치행렬을 각각 구하라.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -12 & 11 \\ 24 & -25 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -33 & 21 \\ 25 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = [30 \quad -10 \quad 20],$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 37 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 10 & 24 \\ -12 & -25 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & -33 & 25 \\ 8 & 21 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 30 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^T = [-25 \quad 0 \quad 37]$$

[직관] 전치 = 주대각선을 축으로 한 거울대칭. 행벡터 $\leftrightarrow$ 열벡터, 크기

$$m \times n \rightarrow n \times m.$$

Chapter 2. 행렬

2.1 행렬과 행렬 연산

2.2 행렬의 곱

2.3 역행렬

2.4 특별한 행렬

2.5 LU-분해

행렬의 곱 — 정의

두 행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ 와 $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ 의 곱은 **A의 column 수와 B의 row 수가 같을 때에만** 정의되며, 그 크기는 $m \times n$ 이다.

$$A_{m \times p} B_{p \times n} = (AB)_{m \times n} \quad (\text{안쪽 차원 } p \text{ 가 일치})$$

곱 $AB = [c_{ij}]_{m \times n}$ 의 (i, j) 성분 c_{ij} 는 다음과 같다.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (2.4)$$

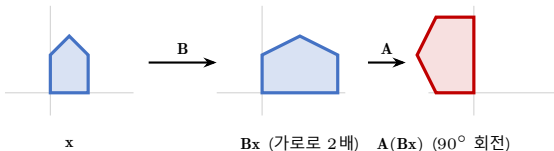
$$(1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n)$$

[읽는 법] AB 의 (i, j) 성분 = **A의 i 번째 row** 와
B의 j 번째 column 의 대응 성분을 곱해 더한 값.

행렬의 곱은 무엇을 뜻하는가 — 변환의 합성

행렬을 수를 담은 표로만 보면 곱셈 정의가 왜 그렇게 생겼는지 알 수 없다. 변환으로 보면 정의가 따라 나온다. Ax 는 “ x 를 A 로 변환한 것”이다. 그렇다면 B 로 변환한 뒤 다시 A 로 변환한 것, 즉 $A(Bx)$ 를 한 번에 하는 하나의 변환으로 쓰고 싶다. 그것을 AB 라 부른다.

$(AB)x = A(Bx)$ 가 항상 성립하도록



B 로 늘린 뒤 A 로 돌린다. 이 둘을 합친 하나의 변환이 AB 다.

[핵심] AB 는 B 를 먼저, 그다음 A . 곱하는 순서가 곧 동작하는 순서다. 앞 쪽의 성분 공식은 이것이 성립하도록 강제된 유일한 정의다.

예제 2-4 행렬의 곱 AB 와 BA (1/2)

다음 두 행렬 A, B 에 대하여 AB 와 BA 를 각각 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

▶ 크기 확인

A 는 2×3 , B 는 3×2 이므로 안쪽 차원 3 이 일치한다. 따라서 AB 는 2×2 , BA 는 3×3 로 둘 다 정의된다.

▶ AB 계산 (A의 row · B의 column)

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1)(-2) & 3(-1) + 1 \cdot 3 + (-1)(-1) \\ 1 \cdot 2 + (-1)0 + 0 \cdot (-2) & 1(-1) + (-1)3 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}}$$

예제 2-4 행렬의 곱 AB 와 BA (2/2)

SOLUTION 2-4

▶ BA 계산 (3×2 곱 2×3 이므로 3×3)

각 성분은 B의 row 와 A의 column 을 성분별로 곱해 더한 값이다. 예를 들어 (1, 1) 성분은 $2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 5$, (3, 1) 성분은 $(-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = -7$.

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

▶ 결론

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad (2 \times 2), \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -7 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3 \times 3)$$

[핵심] AB 와 BA 는 크기부터 다르다. 곱은 일반적으로 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ 이고, 순서가 중요하다.

왜 순서를 바꾸면 달라지는가 — $AB \neq BA$

AB 는 “B 먼저, 그다음 A” 였다. 그러니 순서를 바꾸면 **다른 동작**이다. 교환법칙이 안 되는 것이 예외가 아니라, **되는 쪽이 특별한 경우**다.

AB : 늘린 뒤 돌린다



BA : 돌린 뒤 늘린다



$\neq$

같은 도형, 같은 두 변환. 순서만 바꿨는데 결과가 다르다 (A: 90° 회전, B: 가로로 2배).

[단서] 2차원 회전끼리는 순서를 바꿔도 같다 ($R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha$). 순서가 문제되는 것은 종류가 다른 변환을 섞을 때, 그리고 3차원에서 축이 다른 회전일 때다. 책을 들고 z 축 $\rightarrow x$ 축 90° , 반대로 x 축 $\rightarrow z$ 축 90° 를 해 보면 자세가 다르다.

교환법칙이 깨지는 세 가지 상황

일반적으로 $AB \neq BA$ 이며, 아래 세 가지 경우로 나타난다.

▶ (1) AB 와 BA 의 크기가 다른 경우

예제 2-4처럼 $A (2 \times 3)$, $B (3 \times 2)$ 이면 AB 는 2×2 , BA 는 3×3 이다.

▶ (2) 크기는 같으나 상등이 아닌 경우

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = BA$$

▶ (3) 둘 중 하나만 정의되는 경우

$A (2 \times 3)$, $B (3 \times 4)$ 이면 AB 는 2×4 로 정의되지만, BA 는 안쪽 차원($4 \neq 2$)이 맞지 않아 정의되지 않는다.

연립일차방정식의 행렬 표현

미지수 $x_1, \dots, x_n$ 에 대한 m 개의 일차방정식으로 이루어진 연립일차방정식

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.5)$$

은 **계수행렬**(coefficient matrix) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, 미지수벡터 $\mathbf{x}$, 상수벡터 $\mathbf{b}$ 를 써서 하나의 행렬방정식으로 쓸 수 있다.

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

계수와 상수를 한 판에 모은 **첨가행렬**(augmented matrix)은 $[A | \mathbf{b}]$ 로 나타낸다.

[직관] 연립방정식 = 하나의 행렬방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
 첨가행렬 $[A | \mathbf{b}]$ 는 소거법의 계산판이 된다.

예제 2-5 연립방정식의 행렬 표현과 첨가행렬

다음 연립방정식을 행렬의 곱 $Ax = b$ 로 나타내고, 첨가행렬을 구하라.

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ -2x \quad \quad - \quad z = 6 \\ 3x + 2y - \quad z = 3 \end{cases}$$

▶ 행렬 곱으로 표현

빠진 항의 계수는 0 으로 채운다.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}}_b$$

▶ 첨가행렬 $[A | b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

[주의]

$-2x - z = 6$ 에서 y 의 계수는 0.

행렬 곱의 성질 — 대각합 · 전치

▶ 대각합 [정리 2-4]

A 가 $m \times n$, B 가 $n \times m$ 이면 (곱의 크기는 달라도) 대각합은 같다.

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$$

확인(예제 2-4): $\text{tr}(\mathbf{AB}) = 8 + (-4) = 4$, $\text{tr}(\mathbf{BA}) = 5 + (-3) + 2 = 4$.

▶ 전치 [정리 2-5]

곱의 전치는 순서를 뒤집는다.

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$\mathbf{AB}$ 는 “ B 먼저, 그다음 A ” 로 이어 붙인 통로다. 전치는 그 통로를 **거꾸로 읽는 것**이라 지나는 순서가 뒤집힌다.

행렬 곱의 성질 — 결합 · 분배 · 단위행렬

[정리 2-6] 연산이 가능한 크기의 행렬 A, B, C 와 실수 a 에 대하여 다음이 성립한다.

- | | |
|-----------------------------|--------|
| (1) $A(BC) = (AB)C$ | (결합법칙) |
| (2) $A(B + C) = AB + AC$ | (분배법칙) |
| (3) $(B + C)A = BA + CA$ | (분배법칙) |
| (4) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$ | |

단위행렬 I 는 곱셈의 항등원처럼 작동한다.

$$I_m A = A I_n = A \quad (A \text{ 가 } m \times n)$$

[주의] 곱은 비가환($AB \neq BA$)이지만 **결합·분배법칙**은 성립한다. 즉 **순서**는 지키되
묶는 방법은 자유롭다.

행렬 곱의 성질 — 거듭제곱

▶ 거듭제곱의 정의

정사각행렬 A 를 거듭 곱한 것을 A^r 로 적는다.

$$A^r = \underbrace{A A \cdots A}_{r \text{ 개}} \quad (r \geq 1), \quad A^0 = I_n$$

▶ 거듭제곱의 지수법칙 [정리 2-7]

A 가 정사각행렬이고 r, s 가 음이 아닌 정수일 때,

$$A^r A^s = A^{r+s}, \quad (A^r)^s = A^{rs} \quad (2.7)$$

[주의] 지수법칙은 **한 행렬**의 거듭제곱에서만 성립한다. 곱이 비가환이므로 $(AB)^r = A^r B^r$ 은 일반적으로 성립하지 않는다.

예제 2-6 결합법칙 $A(BC) = (AB)C$ 확인 (1/3)

다음 세 행렬에 대하여 곱셈의 결합법칙 $A(BC) = (AB)C$ 가 성립함을 확인하라.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & -11 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

▶ 먼저 BC 계산

$$BC = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

예제 2-6 결합법칙 $A(BC) = (AB)C$ 확인 (2/3)

SOLUTION 2-6

▶ $A(BC)$ 계산 (3×2)

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & -11 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 106 & 6 \\ -3 & -33 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}}$$

▶ 이번에는 AB 를 먼저 계산 (3×2)

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & -11 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & -2 \\ -25 & 11 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

예제 2-6 결합법칙 $A(BC) = (AB)C$ 확인 (3/3)

▶ $(AB)C$ 계산 (3×2)

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 110 & -2 \\ -25 & 11 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106 & 6 \\ -3 & -33 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

▶ 결론

위의 두 계산 결과가 서로 같으므로 $A(BC) = (AB)C$ 임이 확인된다. ✓

[핵심] 결합법칙 덕분에 ABC 처럼 괄호 없이 써도 결과가 유일하다.

Chapter 2. 행렬

2.1 행렬과 행렬 연산

2.2 행렬의 곱

2.3 역행렬

2.4 특별한 행렬

2.5 LU-분해

역행렬의 정의와 유일성

n 차 정사각행렬 A 에 대하여 다음을 만족하는 n 차 정사각행렬 B 가 존재하면 A 를 가역행렬(invertible matrix)이라 한다.

$$AB = I_n = BA \quad (2.8)$$

이때 B 를 A 의 역행렬(inverse matrix)이라 하고, 그러한 B 가 없으면 A 를 비가역행렬(noninvertible) 또는 특이행렬(singular)이라 한다.

▶ 유일성 (정리 2-8)

가역행렬의 역행렬은 유일하므로 이를 A^{-1} 로 적는다: $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

[직관: 되돌리는 변환] A 가 벡터를 옮기는 함수라면 A^{-1} 는 그것을 정확히 되돌리는 함수. 옮겼다 되돌리면 제자리 $\Rightarrow A^{-1}A = I$.

예제 2-7 역행렬임을 확인

두 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 에 대하여 B 가 A 의 역행렬임을 확인하라.

▶ AB 계산

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

[핵심]

$$AB = BA = I_2 \text{ 이므로} \\ B = A^{-1}$$

▶ BA 계산

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

정사각행렬에서는 $AB = I$ 한쪽만 보여도 충분하지만, 정의대로 양쪽을 모두 확인하였다.

2×2 행렬의 역행렬 공식 (1/2)

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 의 **행렬식**(determinant)을 $\det A = ad - bc$ 라 하면, $\det A \neq 0$ 일 때 역행렬은 다음과 같다.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

- ▶ 대각 성분 a, d 는 **자리 교환**, 비대각 b, c 는 **부호 반전** 뒤 $\det A$ 로 나눈다.
- ▶ $\det A = ad - bc = 0$ 이면 A 는 **비가역**(특이행렬).

2 × 2 행렬의 역행렬 공식 (2/2)

▶ 검산 — 예제 2-7 재확인

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ 이면 } \det A = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1 \text{ 이므로}$$

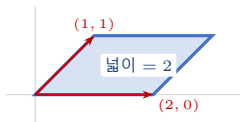
$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

[읽는 법] $|\det A|$ 는 두 column 이 만드는 **평행사변형의 넓이**이다. $\det A = 0$ 이면 두 column 이 한 직선 위에 놓여 역행렬이 없다. 다음 쪽에서 그림으로 본다.

det A 의 뜻 — 두 column 이 만드는 평행사변형

두 column 을 화살표로 그리면 평행사변형이 생기고, 그 넓이가 $|\det A|$ 다.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \det A = 2$$



두 column 이 다른 직선 위 $\Rightarrow$ 평행사변형

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \det B = 0$$



방향은 반대지만 한 직선 위 $\Rightarrow$ 넓이 0

[역행렬이 없는 이유] 두 column 이 한 직선 위에 있으면(한 column 이 다른 column 의 몇 배) 넓이가 0 이다. 오른쪽은 $B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 인데, B^{-1} 가 있다면 양변에 곱해 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이 되어 모순이다. 그래서 역행렬이 없다.

역행렬의 성질 — 정리 2-9

n 차 정사각행렬 A, B 가 가역이고 $k \neq 0$ 인 실수, m 이 음이 아닌 정수일 때:

(1) A^{-1} 도 가역이고 $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) AB 도 가역이고 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (순서가 뒤집힌다)

(3) A^T 도 가역이고 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(4) kA 도 가역이고 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

(5) A^m 도 가역이고 $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$

(5)에서 m 제곱의 역과 역의 m 제곱이 같으므로, 가역인 A 에 대해 $A^{-m} = (A^{-1})^m$ 으로 정의한다. 그러면 지수법칙이 **음의 정수**까지 성립한다.

[되돌리기] 앞으로 1 m 간 뒤 왼쪽으로 90° 돌았다면, 제자리로 오려면 **오른쪽으로 먼저 돌고** 그다음 뒤로 1 m 간다. **마지막에 한 것부터** 되돌리므로 곱의 역은 순서가 뒤집힌다. 다음 쪽에서 그림으로 확인한다.

되돌리면 왜 순서가 뒤집히는가

AB 는 “ B 먼저, 그다음 A ” 로 이어 붙인 하나의 통로다. 이 통로를 거꾸로 지나가려면 마지막에 통과한 A 부터 되돌려야 한다. 그래서 역의 순서가 뒤집힌다.

갈 때 $AB : B$ 먼저



올 때 $(AB)^{-1} : A^{-1}$ 먼저



올 때는 마지막에 한 것부터 되돌린다. 그래서 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ 다.

[같은 이유] 전치도 통로를 거꾸로 읽는 것이라 순서가 뒤집힌다: $(AB)^T = B^T A^T$
 (정리 2-5). 순서가 뒤집히는 두 성질은 같은 구조에서 나온다.

기본행렬 — 정리 2-10, 2-11

단위행렬 I_n 에 **기본 행 연산**을 단 한 번 시행하여 얻은 행렬을 **기본행렬**(elementary matrix)이라 한다. 왼쪽에 곱하면 그 행연산을 수행한다.

▶ 정리 2-10 — 기본행렬과 그 역행렬

기본 행 연산	기본행렬과 그 역행렬
row $i \leftrightarrow$ row j 교환	$E_{ij}, \quad E_{ij}^{-1} = E_{ij}$
row $i \times c$ ($c \neq 0$)	$E_i(c), \quad E_i(c)^{-1} = E_i(1/c)$
row $i \times c$ 를 row j 에 더함	$E_{ij}(c), \quad E_{ij}(c)^{-1} = E_{ij}(-c)$

▶ 정리 2-11 — 행 동치와 기본행렬

$n \times n$ 행렬 A 가 가역이면: (1) A 는 I_n 과 **행 동치**이고, (2) A 는 **기본행렬의 곱**이다.

[핵심] 기본행렬은 모두 가역이고 그 역도 기본행렬이다. 행연산을 **행렬 곱**으로 바꾸는 도구가 된다.

역행렬 구하기 — $[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$

▶ 알고리즘

- (1) 첨가행렬 $[A \mid I_n]$ (크기 $n \times 2n$)을 만든다.
- (2) 행연산으로 $[A \mid I_n]$ 의 RREF $[C \mid D]$ 를 구한다.
- (3) $C = I_n$ 이면 $D = A^{-1}$. $C \neq I_n$ 이면 A 는 비가역(A^{-1} 없음).

▶ 왜 성립하나

행연산은 기본행렬을 왼쪽에 곱하는 것이므로

$$E^{(k)} \dots E^{(1)} [A \mid I_n] = [E^{(k)} \dots E^{(1)} A \mid E^{(k)} \dots E^{(1)}].$$

A 가 가역이면 왼쪽 블록이 I_n 이 되어

$E^{(k)} \dots E^{(1)} A = I_n \Rightarrow E^{(k)} \dots E^{(1)} = I_n A^{-1} = A^{-1}$ 이므로 오른쪽 블록이 곧 A^{-1} 이다.

예제 2-8 3×3 역행렬 구하기 (1/2)

행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 의 역행렬을 구하라.

▶ $[A | I]$ 구성 후 전진 소거

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

왼쪽 블록의 주대각선 아래가 모두 0 이 되었다. 이어서 (2/2)에서 위쪽을 소거한다.

예제 2-8 3×3 역행렬 구하기 (2/2)

SOLUTION 2-8

▶ 위쪽 소거로 RREF 완성 — (1/2)의 마지막 행렬에서 이어서

$$\begin{aligned}
 &\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 - R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]
 \end{aligned}$$

⇒ 왼쪽 블록이 $\mathbf{I}_3$ 이 되었으므로 오른쪽 블록이 역행렬이다:

검산: $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_3$ 을 직접 곱해 확인할 수 있다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

역행렬을 이용한 연립방정식의 풀이

▶ 정리 2-12 — 유일한 해

n 차 정사각행렬 A 가 가역이고 b 가 $n \times 1$ 행렬일 때, 연립방정식 $Ax = b$ 는 유일한 해를 갖는다.

$$Ax = b \implies \boxed{x = A^{-1}b} \quad (2.10)$$

(양변 왼쪽에 A^{-1} 를 곱하면 $A^{-1}Ax = Ix = x = A^{-1}b$.)

▶ 정리 2-13 — 동차연립방정식

A 가 가역이면 동차연립방정식 $Ax = 0$ 는 **자명한 해** $x = 0$ 만을 갖는다.

양변 왼쪽에 A^{-1} 를 곱하면 $x = A^{-1}0 = 0$ 이다. 소거로 보면 I_n 이 되어 **자유변수가 없다는** 말과 같다.

[주의] A 가 비가역이면 A^{-1} 가 없어 이 공식을 쓸 수 없다. 이때 동차계 $Ax = 0$ 는 **자명하지 않은 해**를 갖는다(예제 2-10).

예제 2-9 역행렬로 유도하는 2×2 해 공식

$ad - bc \neq 0$ 일 때 연립방정식 $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ 의 유일한 해가 $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ ($\Delta = ad - bc$, $\Delta_1 = ed - bf$, $\Delta_2 = af - ce$)임을 보여라.

▶ 행렬 표현 후 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 적용

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} ed - bf \\ af - ce \end{bmatrix}$$

⇒ 성분을 비교하면

$$x = \frac{ed - bf}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{af - ce}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

[크래머 공식] 방금 유도한 것이 2×2 **크래머 공식**(Cramer's rule)이다. 분모는 계수행렬의 행렬식 Δ , 분자는 그 행렬에서 구하려는 미지수의 column 을 상수열 $\mathbf{b}$ 로 바꾼 행렬의 행렬식이다. 일반 n 차 꼴은 3장에서 다룬다.

예제 2-10 비가역 계수행렬의 동차연립방정식

비가역행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ 이 계수행렬인 동차연립방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 의 해를 구하라.

▶ 첨가행렬 $[A \mid 0]$ 소거

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 - R_2, \quad R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2 \\ R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow x_3 = t$ 로 두면 $x_1 = -t$, $x_2 = -t$. 영행이 생겨 A 는 I_3 과 행 동치가 아니므로 비가역이고, 자명하지 않은 해가 무수히 많다:

$$\mathbf{x} = t(-1, -1, 1)^T \quad (t \in \mathbb{R})$$

Chapter 2. 행렬

2.1 행렬과 행렬 연산

2.2 행렬의 곱

2.3 역행렬

2.4 특별한 행렬

2.5 LU-분해

대칭행렬과 반대칭행렬 — 정의

정사각행렬 A 가 $A^T = A$ 이면 **대칭행렬**(symmetric matrix), $A^T = -A$ 이면 **반대칭행렬**(skew-symmetric matrix)이라 한다.

$$A^T = A \text{ (대칭)}, \quad A^T = -A \text{ (반대칭)} \quad (2.11)$$

성분으로 보면 대칭이면 $a_{ij} = a_{ji}$, 반대칭이면 $a_{ij} = -a_{ji}$ 이다. 반대칭에서 $i = j$ 로 두면 $a_{ii} = -a_{ii}$ 이므로 **주대각선 성분은 모두 0**이다.

대칭행렬 ($a_{ij} = a_{ji}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

반대칭행렬 ($a_{ij} = -a_{ji}$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[직관] 대칭행렬 = 주대각선을 거울축으로 접으면 그대로 포개지는 행렬. 반대칭행렬 = 접으면 부호가 뒤집혀 포개지고, 축 위(주대각선)는 항상 0.

예제 2-11 대칭 + 반대칭 분해 (정리 2-14)

임의의 정사각행렬은 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 **유일하게** 분해된다 ($\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ 는 대칭, $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ 는 반대칭).

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2} \quad (2.12)$$

행렬 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 를 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 나타내라.

▶ $\mathbf{A}^T$, 합.차를 구해 각각 $\frac{1}{2}$ 배

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

[검산]

$\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, 더하면 $\mathbf{A}$.
 왼쪽은 대칭($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$), 오른쪽은
 대각이 0인 반대칭이다.

왜 대칭과 반대칭으로 나누는가

아래 2×2 예에서 대칭 부분은 축 방향으로 **늘이는** 성분, 반대칭 부분은 **돌리는** 성분이다.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S = \frac{1}{2}(A + A^T)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{K = \frac{1}{2}(A - A^T)}$$

▶ 대칭 부분 S — 늘인다

x 축을 3 배로 늘이고 y 축은 그대로 둔다.

▶ 반대칭 부분 K — 돌린다

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 이므로 시계 방향 90° 회전이다.

반대칭 2×2 는 모두 $c \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 꼴이고 괄호 안 행렬은 반시계 90° 회전이다. 위 예는 $c = -1$ 인 경우다.

[정리] 대칭 부분이 **늘이는 성분**, 반대칭 부분이 **돌리는 성분**이다.

대각행렬과 스칼라행렬

정사각행렬에서 주대각선 성분 이외가 모두 0인 행렬을 **대각행렬**(diagonal matrix)이라 하고, 주대각선 성분이 $a_{11}, \dots, a_{nn}$ 이면 다음과 같이 쓴다.

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

대각행렬 중에서 주대각선 성분이 모두 같은 행렬을 **스칼라행렬**(scalar matrix)이라 한다: $\text{diag}(k, k, \dots, k) = k\mathbf{I}_n$.

[직관] 대각행렬을 왼쪽에 곱하면 각 **row** 를, 오른쪽에 곱하면 각 **column** 을 대각성분 배로 스케일한다. 곱·거듭제곱도 성분별이다:

$$\text{diag}(d_1, \dots, d_n) \text{diag}(e_1, \dots, e_n) = \text{diag}(d_1 e_1, \dots, d_n e_n).$$

예제 2-12 대각행렬 곱하기 — DA 와 AD

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \text{diag}(2, -10, 100)$ 에 대하여 **DA** 와 **AD** 를 각각 구하라.

▶ D 를 왼쪽에 — row 를 스케일

$$DA = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 16 \\ 0 & -20 & 10 \\ 100 & 200 & 300 \end{bmatrix}$$

row 1, 2, 3 을 각각 2, -10, 100 배.

▶ D 를 오른쪽에 — column 을 스케일

$$AD = \begin{bmatrix} 2 & 20 & 800 \\ 0 & -20 & -100 \\ 2 & -20 & 300 \end{bmatrix}$$

column 1, 2, 3 을 각각 2, -10, 100 배.

[관찰] $DA \neq AD$ 이고, 행렬 곱은 일반적으로 비가환이다. 다만 두 **대각행렬**끼리는 항상 가환이고 그 곱도 대각행렬이다.

삼각행렬 — 상삼각 · 하삼각과 성질

주대각선 아래가 모두 0인 행렬을 **상삼각행렬**(upper triangular matrix), 주대각선 위가 모두 0인 행렬을 **하삼각행렬**(lower triangular matrix)이라 한다.

$$\mathbf{U}_n = [u_{ij}] : i > j \Rightarrow u_{ij} = 0, \quad \mathbf{L}_n = [\ell_{ij}] : i < j \Rightarrow \ell_{ij} = 0.$$

상삼각행렬 $\mathbf{U}_4$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

하삼각행렬 $\mathbf{L}_4$

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & 0 \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & \ell_{44} \end{bmatrix}$$

[정리 2-15] (1) 같은 종류(상·상 또는 하·하) 삼각행렬의 곱은 같은 종류의 삼각행렬이다. (2) 가역인 삼각행렬의 역행렬도 같은 종류의 삼각행렬이다.

정리 2-15의 확인 — 곱과 종류

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (상)}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \text{ (하)}.$$

▶ 상 $\times$ 상 $\Rightarrow$ 상삼각

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

▶ 상 $\times$ 하 $\Rightarrow$ 일반

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -15 \\ 3 & 5 & -10 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

[주의] 정리 2-15(1)은 **같은 종류**에서만 성립한다. 종류가 다르면(AC: 상 $\times$ 하) 결과는 일반적으로 삼각행렬이 아니다.

예제 2-13 멱영원행렬과 nil포텐시

영행렬이 아닌 정사각행렬 A 가 어떤 양의 정수 k 에 대해 $A^k = O$ 를 만족하면 **멱영원행렬**(nilpotent matrix)이라 하고, 이를 만족시키는 **최소 k 를 nil포텐시** (nilpotency)라 한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 가 멱영원행렬임을 확인하고 nil포텐시를 구하라.}$$

▶ 거듭제곱을 차례로 계산

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O, \quad A^3 = A^2 A = O.$$

[결론]

$$A^2 \neq O, \quad A^3 = O \\ \Rightarrow \text{nil포텐시 } k = 3.$$

참고: 주대각선이 모두 0인 삼각행렬은 (O 가 아니면) 항상 멱영원행렬이며, $n \times n$ 이면 $A^n = O$ 이다.

정리 2-16 — 역영원행렬과 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$\mathbf{A}$ 의 nilpotency가 k 이면 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 는 가역이고, $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 는 $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ 로 끊기는 등비급수합이다.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1} \quad (2.13)$$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 의 nilpotency를 이용하여 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 를 구하라.

▶ $\mathbf{A}^2$ 로 nilpotency 확인 후 합산

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{O} \Rightarrow k = 3$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

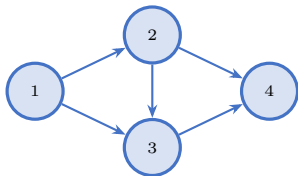
[검산]

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이 행렬에 위 결과를 곱하면 $\mathbf{I}$ 가 됨을 확인할 수 있다.

인접행렬 — 행렬을 그림으로 읽기

성분이 0 **아니면** 1 인 행렬만 생각하자. $a_{ij} = 1$ 을 노드 i 에서 노드 j 로 가는 화살표로 보면 행렬 하나가 그림 하나가 된다. 이렇게 읽은 A 를 **인접행렬**(adjacency matrix) 이라 한다.



$1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 4$.

화살표 다섯 개, 행렬의 1 도 다섯 개다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1 row $(0, 1, 1, 0)$ 은 "노드 1 에서 2 와 3 으로 나간다"는 뜻이다.

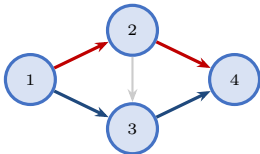
$$(A^m)_{ij} = \text{노드 } i \text{ 에서 } j \text{ 까지 } m \text{ 걸음으로 가는 길의 개수}$$

[직관] A 를 한 번 더 곱하는 것은 **한 걸음 더 가 보는 것이다**.

거듭제곱은 걸음 수 — A 에서 A^4 까지

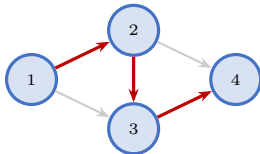
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^4 = \mathbf{0}$$

성분에 적힌 수가 곧 그 걸음 수로 갈 수 있는 **길의 개수**다.



두 걸음으로 $1 \rightarrow 4$ 가는 길은 두 갈래

$$\Rightarrow (A^2)_{14} = 2.$$

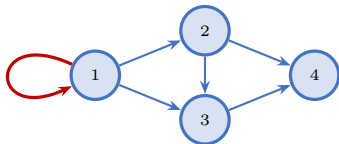


세 걸음으로 $1 \rightarrow 4$ 가는 길은 한 갈래

$$\Rightarrow (A^3)_{14} = 1.$$

[결론] 네 걸음짜리 길은 하나도 없다. 그래서 $A^4 = \mathbf{0}$ 이고 nil포텐시는 4 다.

제자리로 도는 화살표가 하나 있으면



같은 그림에 노드 1 로 되돌아오는 화살표(self-loop) 하나만 더 그렸다. 달라지는 성분은 $b_{11} = 1$ 뿐이다.

$$B = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^2 = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^3 = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^4 = B^3$$

[되짚기] $(B^m)_{11} = 1$ 이 끝까지 남는다. 인접행렬에서는 **주대각선에 1 이 하나라도 있으면 먹영원행렬이 아니다**. 주대각선이 0 이어도 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 처럼 되돌아오는 길이 있으면 마찬가지다. **주대각선이 모두 0 인 삼각행렬은 그런 길이 없어 언제나 먹영원이다.**

Chapter 2. 행렬

2.1 행렬과 행렬 연산

2.2 행렬의 곱

2.3 역행렬

2.4 특별한 행렬

2.5 LU-분해

LU-분해 — 정의

CONCEPT 정리 2-17

행 교환 없이 전진소거가 되는 A 에 대하여

$$A = LU \quad (2.14)$$

L : 주대각선이 모두 1 인 하삼각행렬, U : 전진소거로 얻은 상삼각행렬.

▶ 어디서 나오나

소거 한 단계가 기본행렬 하나이므로 소거 전체는 그 곱이다.

$$E^{(k)} \dots E^{(1)} A = U \implies A = \underbrace{E^{(1)-1} \dots E^{(k)-1}}_L U$$

[승수] $R_j \rightarrow R_j - \ell_{ji} R_i$ 에서 빼는 배수 $\ell_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$ 를 승수(multiplier)라 한다. 소거를 "기록"한 것이 L 이다.

예제 2-14 LU-분해 구하기 (1/4) — 첫 소거

$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ 의 LU-분해를 구하라. 소거 한 단계씩을 기본행렬로 본다.

▶ row 2 의 9 를 0 으로 — $R_2 \rightarrow R_2 - \frac{3}{2}R_1$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{12}(-\frac{3}{2})} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$9 - \frac{3}{2} \cdot 6 = 0$. **빠야** 0 이 되므로 (2, 1) 자리에는 $-\frac{3}{2}$ 가 들어간다.

[1장의 $E_{ij}(c)$] 단위행렬의 (j, i) 자리에만 c 를 넣은 행렬이다. 왼쪽에 곱하면 i row 의 c 배가 j row 에 더해진다. 여기서는 $i = 1, j = 2, c = -\frac{3}{2}$.

예제 2-14 LU-분해 구하기 (2/4) — 나머지 소거와 U

▶ 나머지 두 소거 — 같은 방식

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{23}(-4)} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1 \quad (3 - \frac{1}{2} \cdot 6 = 0), \quad R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2 \quad (8 - 4 \cdot 2 = 0).$$

▶ 소거 전체를 한 줄로

$$E_{23}(-4) E_{13}(-\frac{1}{2}) E_{12}(-\frac{3}{2}) \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

먼저 한 연산이 가장 오른쪽에 온다. 세 소거 모두 $E_{ij}(-\ell)$ 꼴이다.

예제 2-14 LU-분해 구하기 (3/4) — 되돌리면 L

A 로 되돌아가려면 소거를 취소한다. 마지막에 한 것부터 되돌리므로 **순서가 뒤집히고**, 각 단계는 그 역행렬로 바뀐다.

$$E_{ij}(c)^{-1} = E_{ij}(-c)$$

i row 의 c 배를 더했으면 같은 것을 **빼면** 되돌아간다. 부호만 반대다.

$$A = \underbrace{E_{12}\left(\frac{3}{2}\right) E_{13}\left(\frac{1}{2}\right) E_{23}(4)}_{\mathbf{L}} \mathbf{U}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

이 순서로 곱하면 세 행렬이 서로 섞이지 않아 **승수가 제자리에 그대로** 남는다.

예제 2-14 LU-분해 구하기 (4/4) — 검산과 지름길

SOLUTION 2-14

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

▶ 지름길 — E 를 만들지 않고 승수만 적는다

소거하면서 승수 $\ell_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$ 를 (j, i) 자리에 **부호 그대로** 적으면 그것이 $\mathbf{L}$ 이다.

$$\ell_{21} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \quad \ell_{31} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \ell_{32} = \frac{8}{2} = 4$$

[정리] 소거에서는 승수만큼 **빼고**(E 에는 $-\ell$), $\mathbf{L}$ 에는 **그대로**($+\ell$) 적는다. 다음 예제부터는 이 지름길로 푼다.

LU-분해로 연립방정식 풀기

연립방정식 $Ax = b$ 에서 $A = LU$ 이면 $LUx = b$ 이다. $y = Ux$ 로 놓고 **두 단계**로 나누어 푼다:

$$\boxed{Ly = b \quad \longrightarrow \quad Ux = y} \quad (2.16)$$

(1단계) $Ly = b$ 전진대입으로 $y \longrightarrow$ (2단계) $Ux = y$ 역대입으로 x

- ▶ **전진대입**(forward substitution): L 이 하삼각이라 y_1 부터 위 $\rightarrow$ 아래로 즉시 구해진다.
- ▶ **역대입**: U 가 상삼각이라 x_n 부터 아래 $\rightarrow$ 위로 구해진다.
- ▶ 두 삼각 연립방정식 모두 소거가 필요 없어 **대입만**으로 해가 나온다.

[왜 LU인가] 계수행렬 A 가 같고 **우변 b 만 여러 개**일 때, 소거(=분해)는 **한 번만** 하고 각 b 에 대해 전진대입과 역대입만 반복하면 된다.

예제 2-15 LU-분해로 연립방정식 풀기 (1/3)

다음 연립일차방정식의 해를 **LU-분해**를 이용하여 구하라.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} : \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

▶ LU-분해

승수 $\ell_{21} = \frac{-1}{1} = -1$, $\ell_{31} = 0$, $\ell_{32} = \frac{-1}{1} = -1$ 로

소거 ($R_2 \rightarrow R_2 - (-1)R_1$, $R_3 \rightarrow R_3 - (-1)R_2$)하고 승수를 **부호 그대로** 적으면:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 2-15 LU-분해로 연립방정식 풀기 (2/3)

▶ 전진대입 — $Ly = b$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = 2, y_3 = 3$$

▶ 역대입 — $Ux = y$

$y = (2, 2, 3)$ 이므로 $Ux = y$ 의 첨가행렬에서 아래 row 부터:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow x_3 = 3, x_2 = 2 + x_3 = 5, x_1 = 2 + x_2 = 7$$

예제 2-15 LU-분해로 연립방정식 풀기 (3/3)**SOLUTION 2-15**

▶ 해

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (7, 5, 3) \quad (2.17)$$

▶ 검산

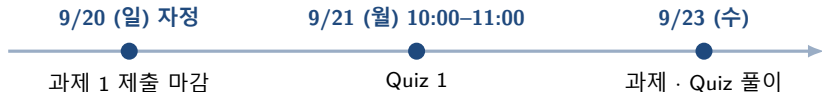
$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \checkmark$$

Thank you

*Dept. of Control and Instrumentation Engineering,
Pukyong National Univ., Busan, Korea.*

pnj@pknu.ac.kr

과제 1 · Quiz 1 안내



▶ 과제 1 — 10문제

- ▶ 범위: 1장 1문제, 2장 9문제
- ▶ 문제지: LMS 에 PDF 로 게시
- ▶ 제출: **LMS 업로드**
- ▶ 마감: **2026년 9월 20일(일) 자정**

▶ Quiz 1 — 4문제

- ▶ 일시: **2026년 9월 21일(월)**
- ▶ 시간: **10:00-11:00**
- ▶ 범위: 2장 행렬
- ▶ 풀이: 9월 23일(수) 수업

[제출 주의] 반드시 **PDF 파일 하나로** 업로드한다. 여러 개의 파일로 올리면 **미제출** 처리한다. 손풀이 사진이나 스캔이 여러 장이면 PDF 하나로 합쳐서 올린다.