Linear Algebra
선형대수학

Chapter 4

n차원 실벡터

4.1 벡터의 정의 ~ 4.5 벡터의 활용

Department of Control & Instrumentation Engineering
Pukyong National University, Busan, Korea
pnj@pknu.ac.kr

선형대수학 Course Contents

Chapter 1 연립일차방정식

Chapter 2 행렬

Chapter 3 행렬식

Chapter 4 n차원 실벡터

Chapter 5 벡터공간

Chapter 6 선형변환

Chapter 7 고윳값과 고유벡터

Chapter 8 복소벡터공간

Chapter 4. n차원 실벡터

4.1 벡터의 정의

4.2 내적

4.3 외적

4.4 n차원 벡터

4.5 벡터의 활용

학습목표

- **벡터**와 그 성질을 이해할 수 있다.
- 벡터의 **내적**과 **외적**의 성질을 이해할 수 있다.
- n**차원 벡터**와 그 성질을 이해할 수 있다.
- 벡터를 이용하여 좌표공간에서의 **직선의 방정식**과 **평면의 방정식**을 구할 수 있다.
- 벡터를 **활용**하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.

스칼라와 벡터

CONCEPT 정의

스칼라(scalar) : 크기를 한 실수로 나타낸 양

벡터(vector) : 크기와 방향을 동시에 나타낸 양

유향선분(directed line segment) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: 벡터를 나타내는 화살표

시점(initial point) A : 출발점, **종점**(terminal point) B : 끝점

벡터의 크기(magnitude) $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$: 유향선분의 길이 (교재 표기 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$)

스칼라 : 속력 60 km/h $=$ 수 하나



벡터 : 북동쪽으로 60 km/h



[표기] 크기는 $\|\mathbf{v}\|$ 로 쓴다. 한 줄 막대는 절댓값 $|x|$, 행렬식 $|\mathbf{A}|$ 에 이미 쓰고 있다.

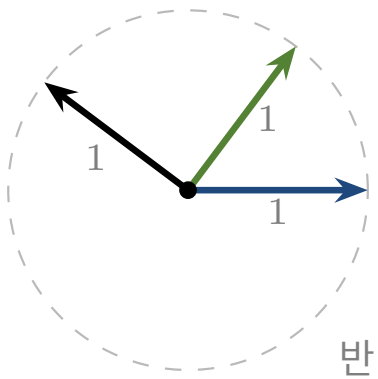
여러 가지 벡터 — 단위벡터와 영벡터 (1/2)

CONCEPT 정의

단위벡터(unit vector) : 크기가 1 인 벡터

영벡터(zero vector) $\mathbf{0}$: 크기가 0 인 벡터. 시점 $=$ 종점이라 점 하나로 그린다.

평면벡터(plane vector) : 평면의 벡터, **공간벡터**(space vector) : 공간의 벡터



반지름 1 인 원

$\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$

시점 A $=$ 종점 A

단위벡터 셋 : 방향은 다르고 크기는 모두 1. 시점을 한 점에 모으면 끝이 원 위 (공간에서는 구 위)

[주의] 영벡터는 길이가 0 이라 **방향이 정해지지 않는다**. 단위벡터는 **방향만** 담는다.

여러 가지 벡터 — 같은 벡터, 음벡터, 평행 (2/2)

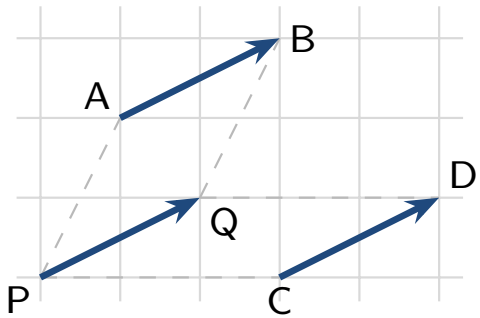
CONCEPT 정의

서로 같다(equal) : 두 벡터의 크기와 방향이 같다. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

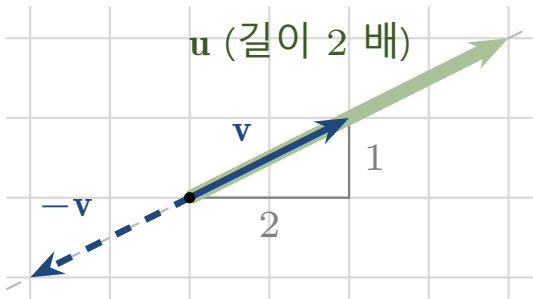
음벡터(negative vector) $-\mathbf{v}$: $\mathbf{v}$ 와 크기는 같고 방향만 반대. $\|\mathbf{v}\| = \|-\mathbf{v}\|$

평행(parallel) $\mathbf{u}//\mathbf{v}$: 두 벡터의 방향이 같거나 반대

같은 벡터 : 오른쪽 2 칸, 위로 1 칸



평행 : 시점을 모으면 한 직선 위



[직관] 벡터는 **크기와 방향**만 본다. 어디에 그렸는지는 상관없다.
평행한 두 벡터는 시점을 한 점에 모으면 **한 직선 위**에 놓인다.

예제 4-1 직사각형 위의 벡터 (1/2)

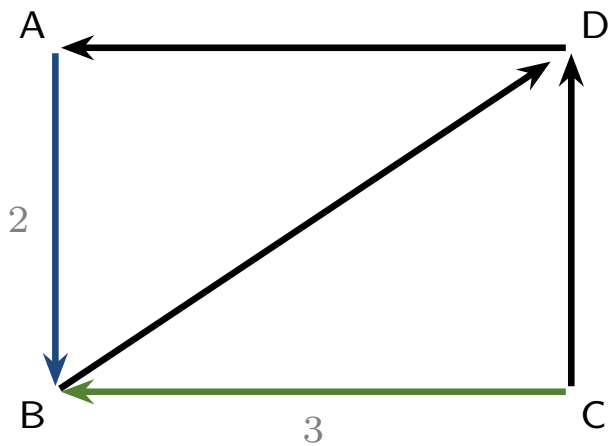
다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 위에 벡터가 있다. $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{BC}} = 3$ 일 때, 다음 물음에 답하라.

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ 와 같은 벡터를 각각 구하라.

(b) $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$, $\|\overrightarrow{\mathrm{DA}}\|$, $\|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\|$, $\|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\|$ 를 각각 구하라.

(c) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 의 음벡터를 구하라.

(d) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ 와 평행인 벡터를 각각 구하라.



▶ **(a) 같은 벡터 = 평행이동하면 겹치는 벡터**

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{DA}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$: 둘 다 아래로 2 (그림의 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ 는 반대 방향)

$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$: 둘 다 왼쪽으로 3

예제 4-1 직사각형 위의 벡터 (2/2)

SOLUTION 4-1

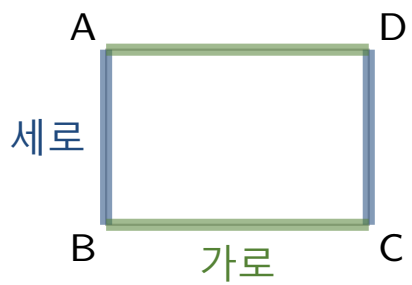
▶ (b) 크기 = 화살표의 길이. 대각선 BD 는 피타고라스 정리

$$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = 2, \quad \|\overrightarrow{\mathrm{DA}}\| = 3, \quad \|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\| = 2, \quad \|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

▶ (c) 크기는 같고 방향만 반대

$$-\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

▶ (d) 방향이 같거나 반대 = 평행한 변 위의 벡터



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 와 평행 : $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ (세로 변 위)

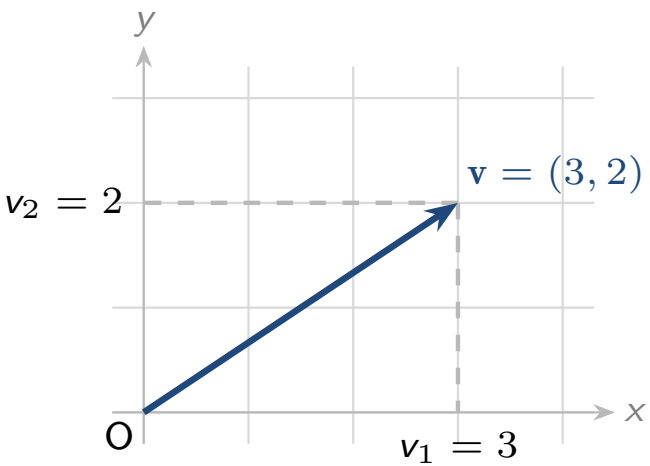
$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ 와 평행 : $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ (가로 변 위)

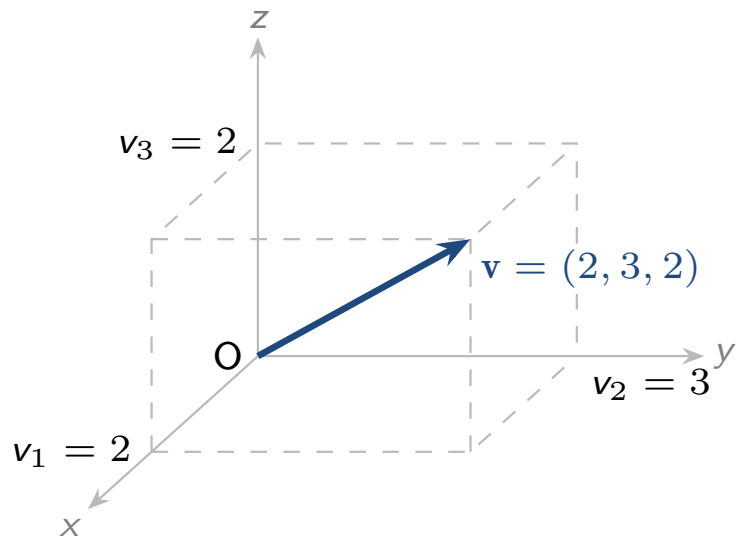
벡터의 성분

CONCEPT 정의

시점을 원점 O 에 둘 때 종점 좌표의 각 수가 벡터의 **성분**(component)

$$\mathbf{v} = (v_1,\ v_2) \quad (\text{평면}), \qquad \mathbf{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3) \quad (\text{공간})$$





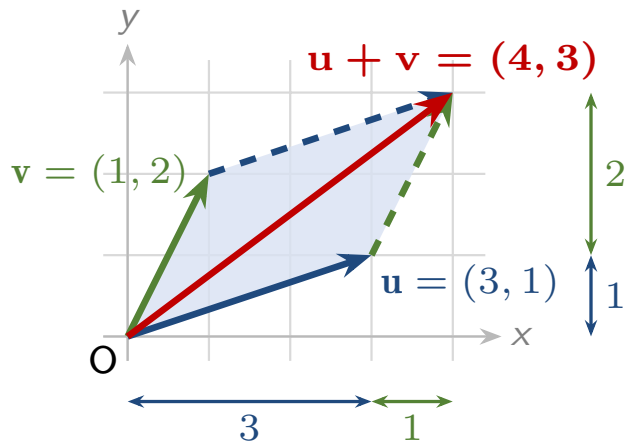
[직관] 성분 = 각 축 방향으로 가는 양. 평면벡터는 수 2 개, 공간벡터는 수 3 개.

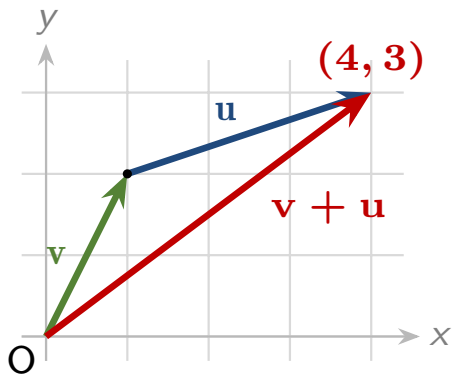
벡터의 합

CONCEPT 정의

합(sum) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$: $\mathbf{u}$ 의 종점에 $\mathbf{v}$ 의 시점을 붙일 때 $\mathbf{u}$ 의 시점 $\rightarrow$ $\mathbf{v}$ 의 종점

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2), \qquad \mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3)$$





$\mathbf{v}$ 의 종점에 $\mathbf{u}$ 의 시점

$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(3+1,\ 1+2)=(4,3)=$ 평행사변형의 대각선

[직관] $\mathbf{u}$ 먼저 가도, $\mathbf{v}$ 먼저 가도(점선, 오른쪽) 같은 점 $(4,3) \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

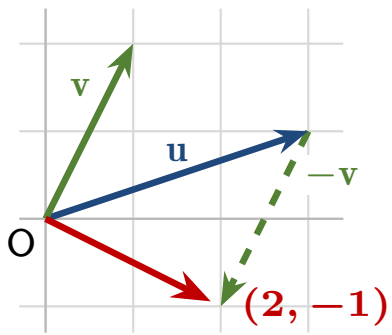
벡터의 차

CONCEPT 정의

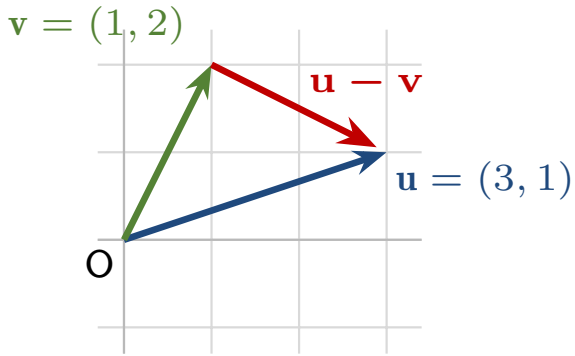
차(difference) $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$: $\mathbf{u}$ 에 음벡터 $-\mathbf{v}$ 를 더한 것

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=(u_1-v_1,\ u_2-v_2),\qquad \mathbf{u}-\mathbf{v}=(u_1-v_1,\ u_2-v_2,\ u_3-v_3)$$

$\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$: $\mathbf{u}$ 의 종점에 $-\mathbf{v}$ 의 시점



시점을 모으면 : $\mathbf{v}$ 끝 → $\mathbf{u}$ 끝



$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=(3-1,\ 1-2)=(2,-1)$$

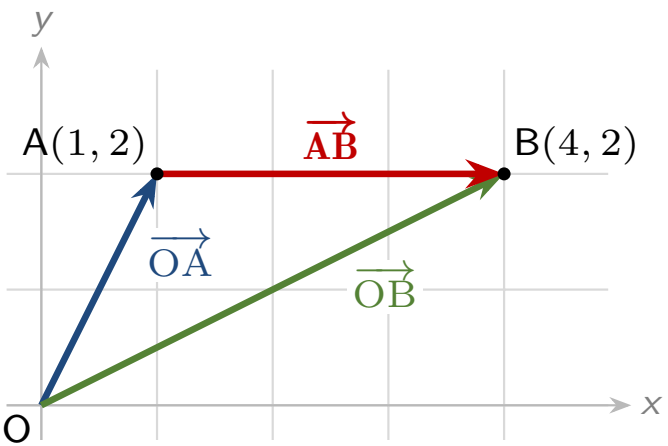
[읽는 법] 시점을 모으면 $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ 는 **$\mathbf{v}$ 의 종점 → $\mathbf{u}$ 의 종점** (다음 쪽 : 두 점 사이의 벡터).

두 점으로 정해지는 벡터

$$\mathrm{A}(x_1, y_1) \to \mathrm{B}(x_2, y_2) \ : \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

종점 좌표 − 시점 좌표. 공간도 같다 : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$

▶ 어디서 나오나 — 원점에서 $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(4,2)$ 로 가는 두 벡터



합 : $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 의 종점에 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 의 시점

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

양변에서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 를 빼면 (차)

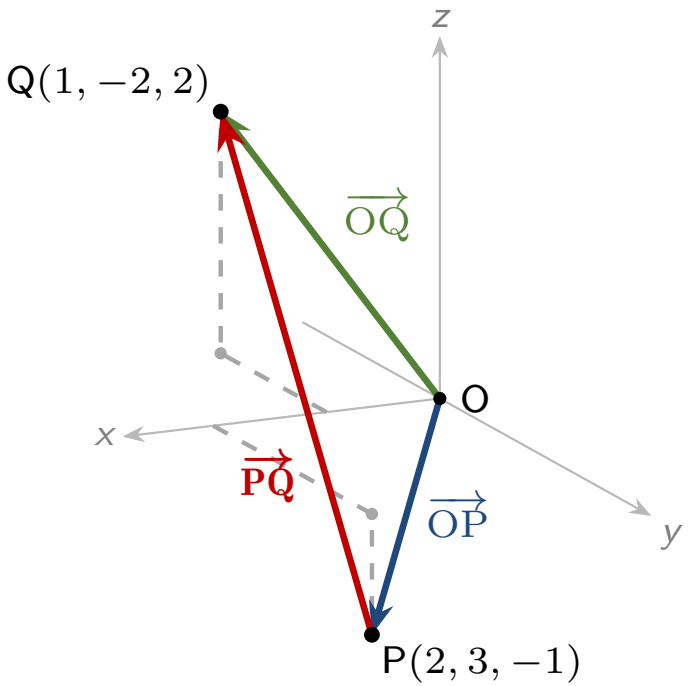
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (4,2) - (1,2)$$

$$= (4-1,\ 2-2) = \mathbf{(3,\ 0)}$$

[직관] 시점이 O 인 벡터의 성분 = 종점의 좌표.
그래서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ = 종점 B 의 좌표 − 시점 A 의 좌표.

예제 4-2 두 점으로 정해지는 공간벡터

좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,3,-1)$ 을 시점으로 하고 점 $\mathrm{Q}(1,-2,2)$ 를 종점으로 하는 벡터를 구하고 좌표공간에 나타내라.



앞 쪽과 같다 : $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= (1,-2,2) - (2,3,-1)$$

$$= \big(1-2,\ -2-3,\ 2-(-1)\big)$$

$$= \mathbf{(-1,\ -5,\ 3)}$$

[직관] P 에서 x 로 -1, y 로 -5, z 로 $+3$ 만큼 가면 Q. 축마다 간 양이 곧 성분이다.

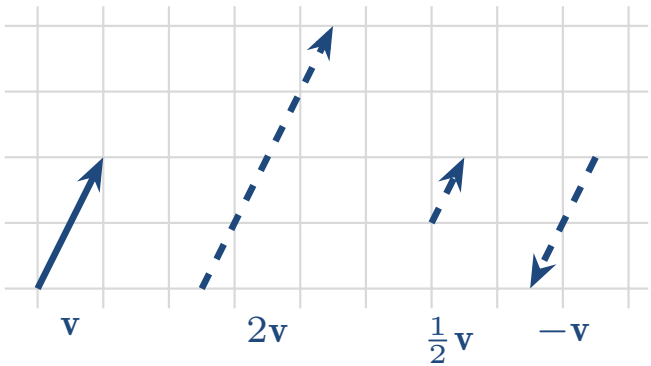
벡터의 스칼라 곱

CONCEPT 정의

실수 c 와 벡터 $\mathbf{v}$ 의 **스칼라 곱**(scalar multiple) $c\mathbf{v}$: 크기는 $|c|$ 배

$c > 0$ 이면 $\mathbf{v}$ 와 같은 방향, $c < 0$ 이면 $\mathbf{v}$ 와 반대 방향

$$c\mathbf{v} = (cv_1,\ cv_2) \quad \text{또는} \quad c\mathbf{v} = (cv_1,\ cv_2,\ cv_3)$$



$$\mathbf{v} = (1, 2), \quad 2\mathbf{v} = (2, 4), \quad \tfrac{1}{2}\mathbf{v} = (\tfrac{1}{2}, 1), \quad -\mathbf{v} = (-1, -2)$$

[평행과 연결] 영 아닌 두 벡터에서 $\mathbf{u} /\!/ \mathbf{v} \iff \mathbf{u} = c\mathbf{v}\ (c \neq 0)$. $c = 0$ 이면 $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

벡터 연산의 성질 — 정리 4-1 (1/2)

CONCEPT 정리 4-1

스칼라 c, k 와 $\mathbb{R}^2$ 또는 $\mathbb{R}^3$ 위의 세 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(2) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

(3) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

(4) $\mathbf{u}-\mathbf{u}=\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

(5) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

(6) $(ck)\mathbf{u}=c(k\mathbf{u})=k(c\mathbf{u})$

(7) $(c+k)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+k\mathbf{u}$

(8) $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$

[왜 그런가] 합과 스칼라 곱은 **성분끼리** 계산 $\Rightarrow$ 실수의 계산 법칙이 그대로 성립.

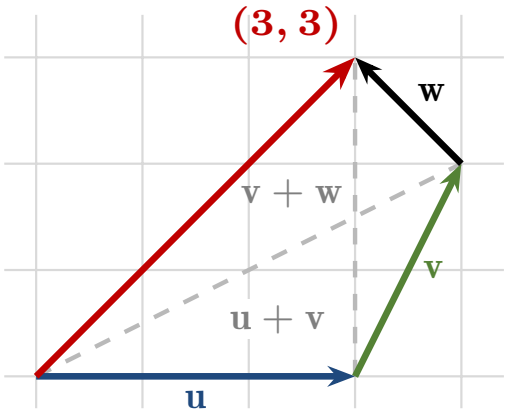
벡터 연산의 성질 — 성분으로 보기 (2/2)

▶ 왜 그런가 — 성분마다 실수의 성질. 평면에서 보이고 (2)∼(7) 도 같다

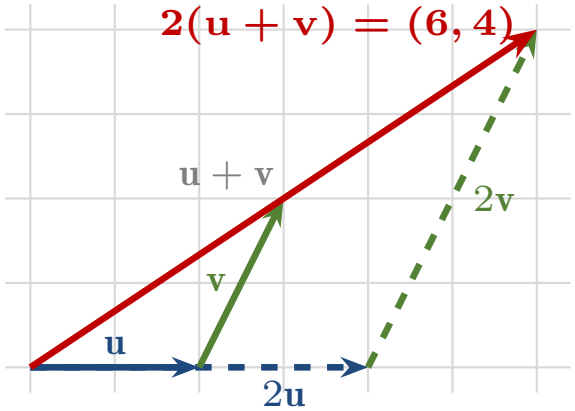
$$(1)\quad \mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2)=(v_1+u_1,\ v_2+u_2)=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

$$(8)\quad c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\big(c(u_1+v_1),\ c(u_2+v_2)\big)=(cu_1+cv_1,\ cu_2+cv_2)=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$$

(2) $\mathbf{u}=(3,0)$, $\mathbf{v}=(1,2)$, $\mathbf{w}=(-1,1)$



(8) $c=2$, $\mathbf{u}=(2,0)$, $\mathbf{v}=(1,2)$



[직관] (1) 은 벡터의 합에서 본 평행사변형. (2) 어느 둘을 먼저 더해도 끝점은 $(3,3)$.
(8) 삼각형을 통째로 2 배 하면 세 변이 모두 2 배 $\Rightarrow 2\mathbf{u}+2\mathbf{v}=2(\mathbf{u}+\mathbf{v})$.

예제 4-3 벡터 연산의 계산 (1/2)

주어진 벡터에 대하여 다음을 구하라.

$$\mathbf{a} = (-2, 1), \quad \mathbf{b} = (-3, -7), \quad \mathbf{c} = (2, 0)$$
$$\mathbf{u} = (2, -1, -2), \quad \mathbf{v} = (3, 1, -1), \quad \mathbf{w} = (-2, 3, 1)$$

(a) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ **(b)** $-3\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ **(c)** $\mathbf{u} + \mathbf{0}$

(d) $-\mathbf{v}$ **(e)** $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$ **(f)** $-3\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

▶ **(a)(b) 스칼라 곱을 먼저, 그다음 성분끼리 더한다**

$$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (-2, 1) + 2(-3, -7) = (-2, 1) + (-6, -14)$$
$$= (-2 - 6,\ 1 - 14) = (-8, -13)$$
$$-3\mathbf{a} + 2\mathbf{c} = -3(-2, 1) + 2(2, 0) = (6, -3) + (4, 0)$$
$$= (6 + 4,\ -3 + 0) = (10, -3)$$

▶ **(c) 영벡터를 더하면 그대로 :** $\mathbf{u} + \mathbf{0} = (2, -1, -2) + (0, 0, 0) = (2, -1, -2) = \mathbf{u}$

예제 4-3 벡터 연산의 계산 (2/2)

SOLUTION 4-3

▶ **(d) 음벡터 = 모든 성분의 부호를 바꾼다**

$$-\mathbf{v} = -(3, 1, -1) = (-3, -1, 1)$$

▶ **(e) 스칼라 곱을 먼저**

$$\begin{aligned} 2\mathbf{v} - 3\mathbf{w} &= 2(3, 1, -1) - 3(-2, 3, 1) = (6, 2, -2) - (-6, 9, 3) \\ &= (6 + 6,\ 2 - 9,\ -2 - 3) = (12, -7, -5) \end{aligned}$$

▶ **(f) 세 벡터도 같다**

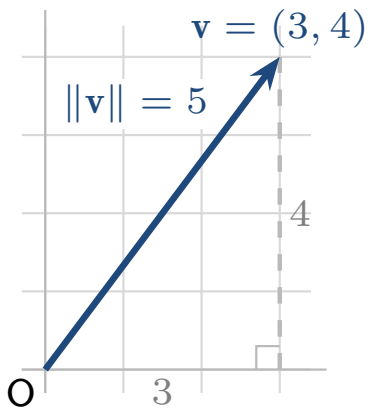
$$\begin{aligned} -3\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 2\mathbf{w} &= -3(2, -1, -2) - 4(3, 1, -1) + 2(-2, 3, 1) \\ &= (-6, 3, 6) + (-12, -4, 4) + (-4, 6, 2) \\ &= (-6 - 12 - 4,\ 3 - 4 + 6,\ 6 + 4 + 2) = (-22, 5, 12) \end{aligned}$$

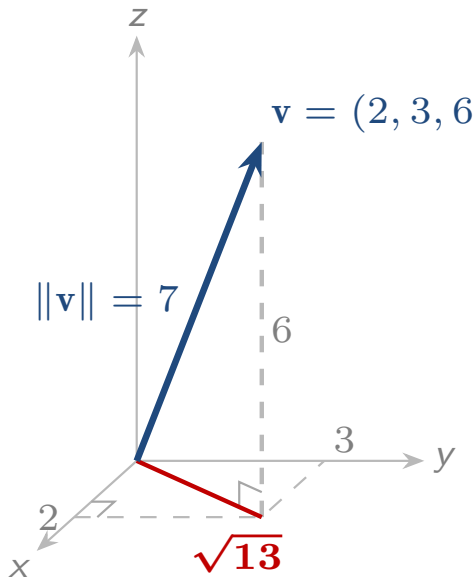
[요령] 스칼라 곱을 먼저 하고 성분끼리 더한다. $-(-6) = +6$ 같은 부호에 주의.

벡터의 크기

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \ \text{(평면)}, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \ \text{(공간)}$$

크기 = 유향선분의 길이. 성분이 서로 직각 방향이므로 피타고라스 정리로 잰다.





$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ $\qquad$ $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \ \Rightarrow \ \sqrt{13 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$

[직관] 공간에서는 피타고라스 정리를 **두 번** 쓴다 (밑면 대각선 $\sqrt{13} \to$ 높이 6).

예제 4-4 벡터의 크기 구하기

다음 벡터의 크기를 구하라.

(a) $\mathbf{a} = (-7, 2)$ **(b)** $\mathbf{b} = (0, -5)$

(c) $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **(d)** $\mathbf{v} = (-2, 3, 4)$

▶ **성분의 제곱을 모두 더해 제곱근 : (a)(b) 는 평면, (c)(d) 는 공간**

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(-7)^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}, \qquad \|\mathbf{b}\| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$$

[주의] 음수 성분도 제곱하면 양수: $(-7)^2 = 49$. (c) 는 크기가 1 이므로 단위벡터다.

크기의 성질 — 정리 4-2 (1/2)

CONCEPT 정리 4-2

$\mathbb{R}^3$ 위의 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 와 임의의 스칼라 c 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ 이다. 특히 $\|\mathbf{v}\| = 0$ 일 필요충분조건은 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 이다.

(2) $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2, cv_3)$ 의 크기는 $\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|$ 이다.

(3) $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 에 대하여 $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\,\mathbf{v}$ 는 단위벡터이다.

▶ 왜 그런가 — 크기의 정의 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ 에서

(1) $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \geq 0$, $\quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0 \iff v_1 = v_2 = v_3 = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(2) $\|c\mathbf{v}\| = \sqrt{c^2 v_1^2 + c^2 v_2^2 + c^2 v_3^2} = \sqrt{c^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = |c|\,\|\mathbf{v}\|$

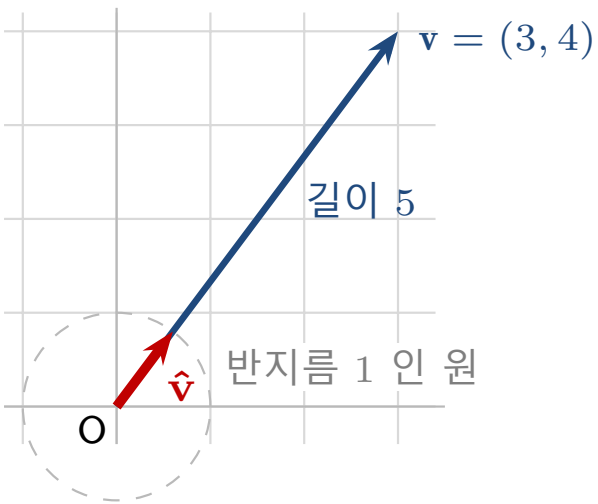
(3) $c = 1/\|\mathbf{v}\| > 0$ 을 (2) 에 넣으면 $\|\mathbf{u}\| = \big(1/\|\mathbf{v}\|\big)\,\|\mathbf{v}\| = 1$ $\quad$ (정규화, 다음 쪽)

크기의 성질 — 정규화, $\mathbf{v} = (3, 4)$ 로 보기 (2/2)

CONCEPT 정의

정규화(normalization) : 벡터를 자기 크기로 나누어 크기를 1 로 만드는 것

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \qquad (\mathbf{v} \neq \mathbf{0},\ \text{정리 4-2 (3) 의 } \mathbf{u})$$



크기 $\|\mathbf{v}\|$ 로 나누어 정규화

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{5}\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

$$\|\hat{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

[직관] 양수 $1/\|\mathbf{v}\|$ 를 곱하므로 방향은 그대로. 크기로 나누면 **방향만** 남는다.

예제 4-5 단위벡터 판정과 만들기

다음 벡터 중 단위벡터인 것을 찾아라. 단위벡터가 아니라면, 주어진 벡터와 방향이 같은 단위벡터를 구하라.

(a) $\mathbf{u} = (2, -3)$ **(b)** $\mathbf{v} = (-2, 4, 2)$ **(c)** $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

▶ **크기를 잰다. 1 이 아니면 크기로 나누어 정규화한다 (정리 4-2 (3))**

(a) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \neq 1 \;\Rightarrow\; \hat{\mathbf{u}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2, -3) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}},\; -\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$

(b) $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \neq 1 \;\Rightarrow\; \hat{\mathbf{v}} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}(-2, 4, 2) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$

(c) $\|\mathbf{k}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{k}$ 는 단위벡터

[검산] (b) $\|\hat{\mathbf{v}}\| = \sqrt{1 + 4 + 1}\,/\sqrt{6} = 1$. 양수배이므로 방향도 $\mathbf{v}$ 그대로.

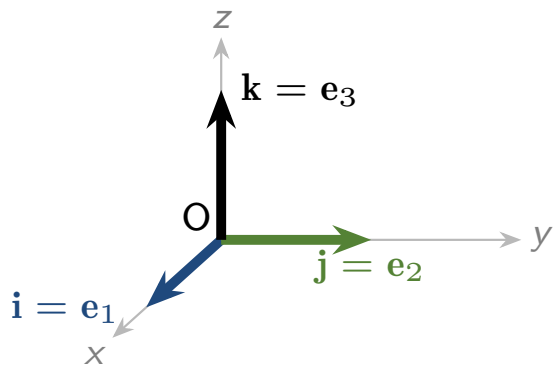
표준단위벡터 — 각 축 방향의 단위벡터 (1/2)

CONCEPT 정의

표준단위벡터(standard unit vector) : 각 축과 방향이 같은 단위벡터

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \qquad \mathbf{j} = (0,1,0), \qquad \mathbf{k} = (0,0,1)$$

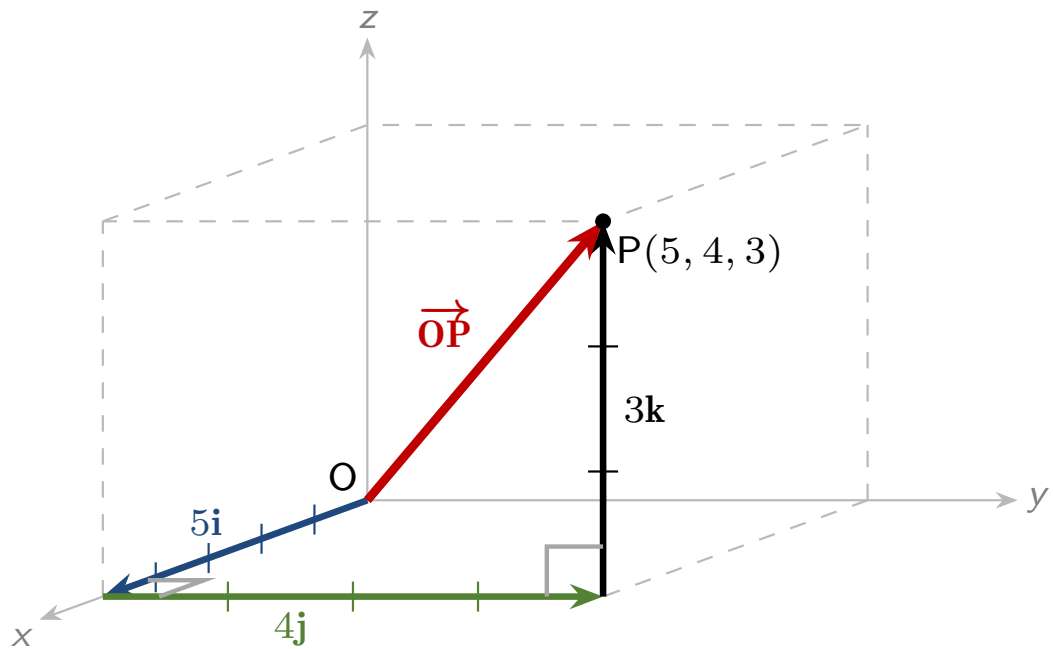
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1)$$
$$= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$



[표기] $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 는 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 의 다른 이름.

표준단위벡터 — 점 P$(5,4,3)$ 로 가는 길 (2/2)

원점 O 에서 점 $\mathrm{P}(5,4,3)$ 으로 가는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 를 **i**, **j**, **k** 로 쓰면?



x 축으로 **i** 를 5 번, y 축으로 **j** 를 4 번, z 축으로 **k** 를 3 번 (눈금 사이 = 한 번)

[답] $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (5,4,3) = \mathbf{5i + 4j + 3k}$. 성분이 곧 각 표준단위벡터의 계수다.

예제 4-6 순서쌍과 표준단위벡터

순서쌍으로 표현된 벡터는 표준단위벡터의 합으로,
표준단위벡터의 합으로 표현된 벡터는 순서쌍으로 나타내라.

(a) $\mathbf{a} = (5, -9)$ **(b)** $\mathbf{b} = (2, -4, 3)$ **(c)** $\mathbf{c} = (-3, 0, 1)$

(d) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ **(e)** $\mathbf{v} = -\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$ **(f)** $\mathbf{w} = -7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

▶ **(a)(b)(c) 순서쌍 $\rightarrow$ 표준단위벡터 : 성분이 계수**

$$\mathbf{a} = (5, -9) = 5\mathbf{i} - 9\mathbf{j}, \qquad \mathbf{b} = (2, -4, 3) = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{c} = (-3, 0, 1) = -3\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

▶ **(d)(e)(f) 표준단위벡터 $\rightarrow$ 순서쌍 : 없는 항의 성분은 0**

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = (3, -2, -5), \qquad \mathbf{v} = -\mathbf{j} + 13\mathbf{k} = (0, -1, 13)$$

$$\mathbf{w} = -7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k} = (-7, -5, 8)$$

[주의] (a) 는 평면벡터라 $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$ 로 읽는다.
계수가 0 인 항은 쓰지 않는다 ((c) 의 $0\mathbf{j}$, (e) 의 $0\mathbf{i}$).

Chapter 4. n차원 실벡터

4.1 벡터의 정의

4.2 내적

4.3 외적

4.4 n차원 벡터

4.5 벡터의 활용

내적의 정의 (1/2)

CONCEPT 정의

좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 또는 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 영 아닌 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 사이의 각을 **사잇각**(angle) θ $(0 \le \theta \le \pi)$ 라 할 때, **내적**(inner product) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 는

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta \quad (4.1)$$

결과는 스칼라다. $\mathbf{u}$ 나 $\mathbf{v}$ 가 $\mathbf{0}$ 이면 각이 없으므로 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ 으로 둔다.

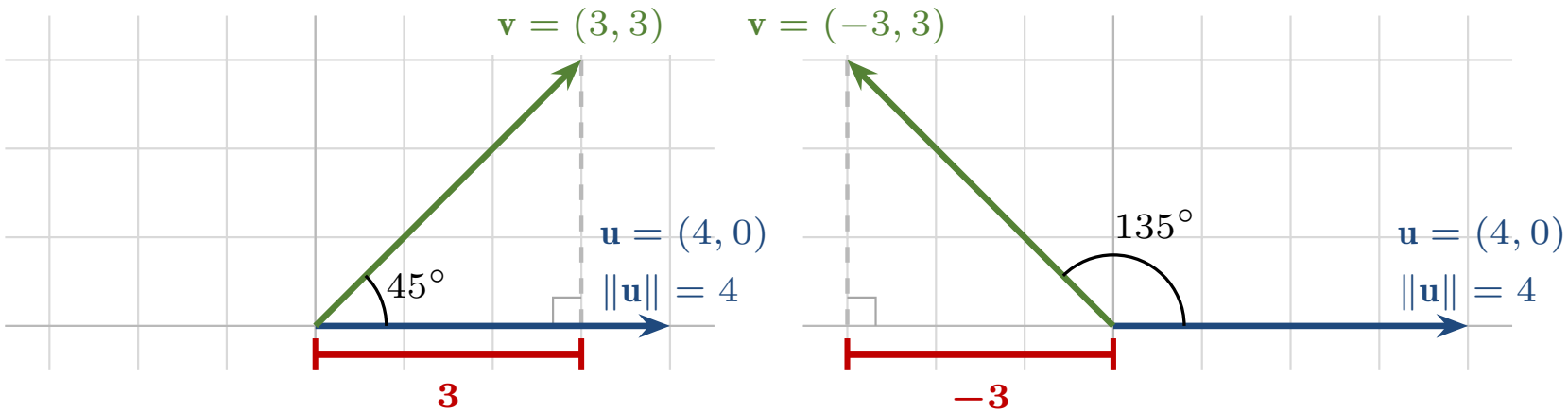
▶ **읽는 법 — 얼마나 평행한가 : 한 벡터를 다른 벡터의 직선 위로 내린다**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \times \big(\|\mathbf{v}\| \cos\theta\big) = (\mathbf{u} \text{ 의 크기}) \times (\mathbf{v} \text{ 를 } \mathbf{u} \text{ 위로 내린 부호 있는 길이})$$

[각의 범위] θ 는 작은 쪽 각. 반대로 잰 $2\pi - \theta$ 도 $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$ 라 값이 같다. 그래서 π 를 넘는 각은 새 정보가 없다.

내적의 정의 — 부호 있는 길이로 읽기 (2/2)

$\mathbf{v}$ 를 $\mathbf{u}$ 의 직선 위로 수직으로 내린 것을 $\mathbf{u}$ 위로의 $\mathbf{v}$ 의 **정사영**(projection)이라 한다. 여기서는 그 부호 있는 길이만 쓰고, 벡터로 쓰는 $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$ 는 4.5절 (4.18) 에서 다룬다.

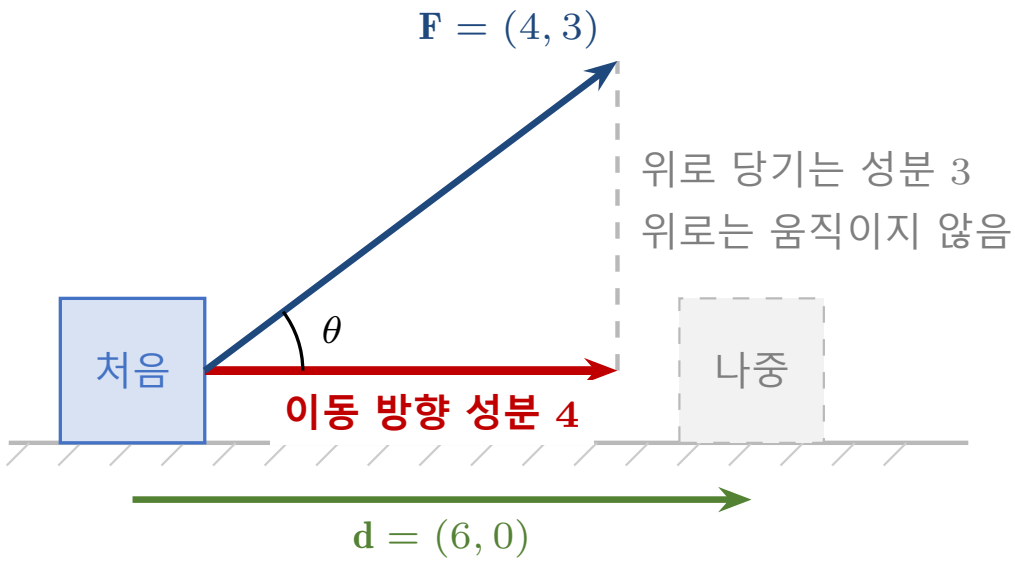


빨간 괄호 : 정사영의 부호 있는 길이 $\|\mathbf{v}\|\cos\theta$

[직관] 둔각이면 $\cos\theta < 0$ 이라 $\mathbf{v}$ 의 정사영이 $\mathbf{u}$ 의 **반대쪽**에 떨어진다 $\Rightarrow$ 내적도 음수.

내적의 직관 — 얼마나 평행한가

바닥의 상자를 끈으로 끈다. 끄는 힘 $\mathbf{F} = (4, 3)$, 상자가 움직인 거리와 방향 $\mathbf{d} = (6, 0)$.

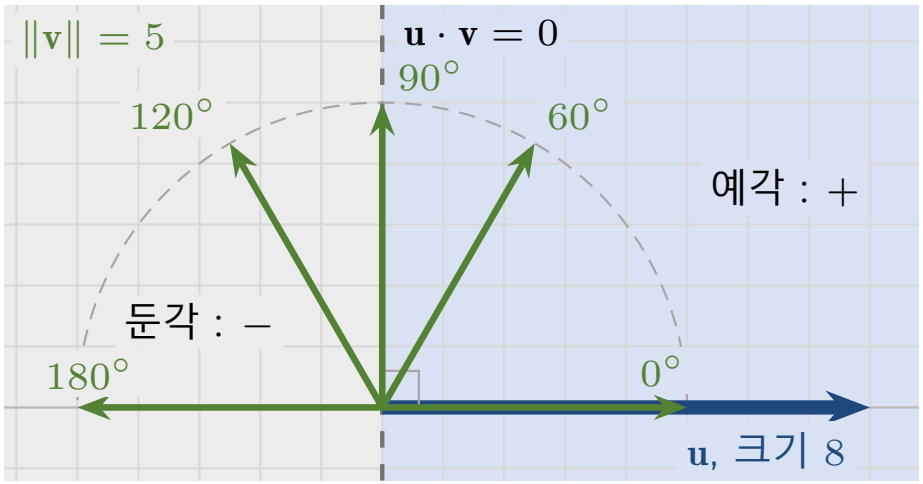


$$\underbrace{4}_{\text{이동 방향}} \times 6 + \underbrace{3}_{\text{위쪽}} \times 0 = 24 = \underbrace{6}_{\|\mathbf{d}\|} \times \underbrace{(5 \cdot 0.8)}_{\|\mathbf{F}\| \cos\theta = 4}$$

[직관] 두 벡터가 **얼마나 평행한가**를 재는 곱. 수직 성분은 기여가 0 이다.
이 곱 24 가 물리의 일(work). 정의 (4.1) 의 (크기) × (내린 부호 있는 길이) 그대로다.

크기를 고정하고 돌려 보기 — 부호의 영역 (1/2)

$\mathbf{u} = (8, 0)$ 을 고정하고, $\mathbf{v}$ 는 크기를 5 로 고정한 채 방향만 돌린다.



초록 벡터는 모두 크기 5 (점선 반원). 초록 수 : u 로부터 잰 각

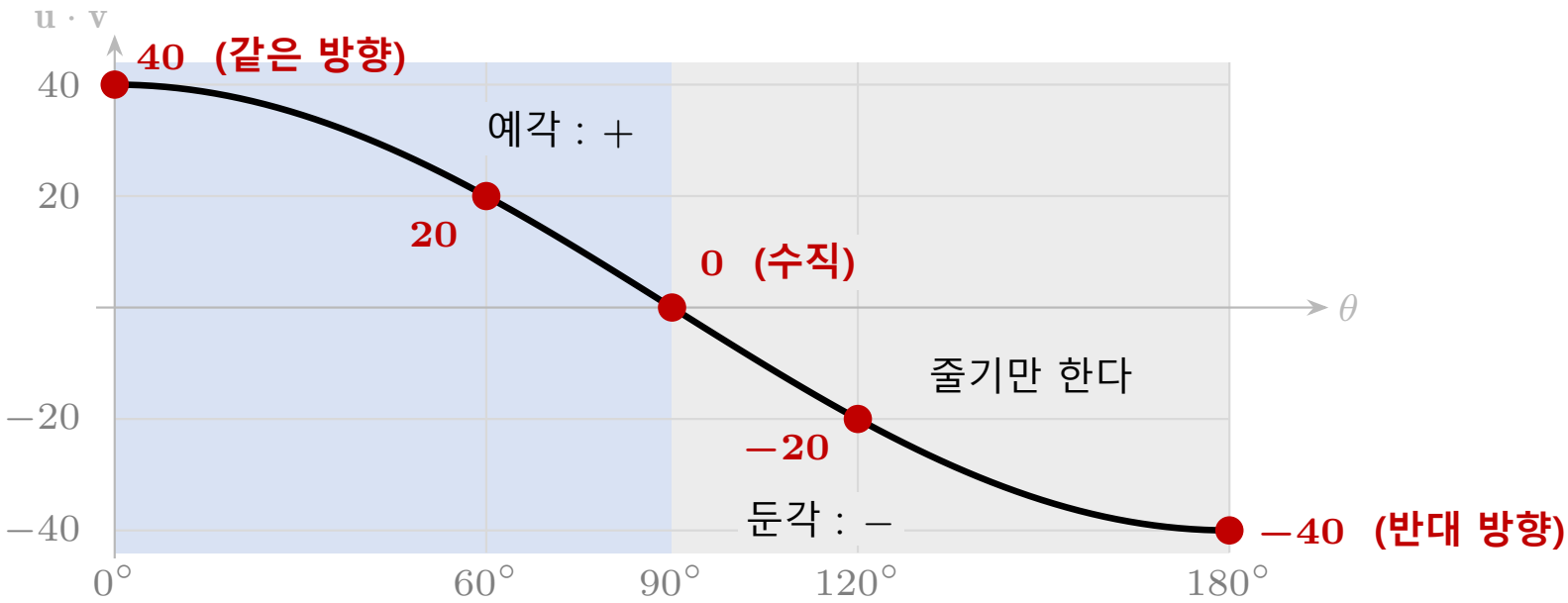
▶ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 8 \cdot 5 \cdot \cos\theta$

θ	$\cos\theta$	$40\cos\theta$
$0°$	1	40
$60°$	$\frac{1}{2}$	20
$90°$	0	0
$120°$	$-\frac{1}{2}$	-20
$180°$	-1	-40

[읽는 법] 경계는 $\mathbf{u}$ 에 수직인 직선. $\mathbf{u}$ 쪽 반평면(예각) $+$, 반대쪽(둔각) $-$, 직선 위 0. $\mathbb{R}^3$ 에서는 경계가 $\mathbf{u}$ 에 수직인 평면이 된다.

크기를 고정하고 돌려 보기 — $40\cos\theta$ 곡선 (2/2)

앞 쪽의 다섯 값을 θ 에 대해 찍으면 모두 한 곡선 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 40\cos\theta$ 위에 놓인다.



빨간 점 : 앞 쪽의 다섯 v. 바탕색은 앞 쪽의 두 반평면과 같다

[직관] 크기 곱 $8 \times 5 = 40$ 은 그대로, 내적을 바꾸는 것은 ***θ* 뿐**이다.
$[0°, 180°]$ 에서 cos 는 줄기만 해서 내적 값 하나에 각이 하나로 정해진다.

예제 4-7 사잇각으로 내적 구하기

다음 두 벡터의 내적을 구하라.
(a) 사잇각이 180° 인 두 벡터 $\mathbf{u} = (2,\, 0,\, -2)$, $\mathbf{v} = (-3,\, 0,\, 3)$
(b) 사잇각이 90° 인 두 벡터 $\mathbf{u} = (2,\, 6,\, -5)$, $\mathbf{v} = (-4,\, 3,\, 2)$

▶ **(a) 두 크기를 구해 (4.1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$ 에 넣는다**

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\cos 180^\circ = 12\cdot(-1) = \boxed{-12}$$

▶ **(b) $\cos 90^\circ = 0$ 이라 크기와 상관없이 0**

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos 90^\circ = \sqrt{4+36+25}\cdot\sqrt{16+9+4}\cdot 0 = \sqrt{65}\cdot\sqrt{29}\cdot 0 = \boxed{0}$$

[확인] (a) $\mathbf{v} = -\frac{3}{2}\mathbf{u}$ 이다. 한 직선 위에서 반대 방향이라 180° 가 맞다.

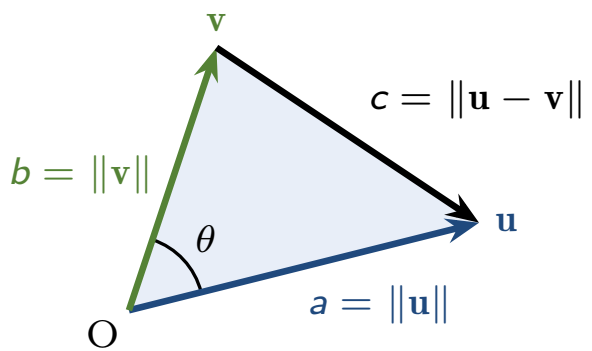
성분으로 계산하는 내적 — 정리 4-3 (1/3)

CONCEPT 정리 4-3

좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위의 벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 와 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 에 대하여 두 벡터의 내적은

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (4.2) \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (4.3)$$

▶ **증명의 도구 — 코사인 법칙 : 두 변 a, b 와 끼인각 θ 로 셋째 변 c 를 구한다**



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

$a = \|\mathbf{u}\|, \quad b = \|\mathbf{v}\|, \quad c = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

셋째 변 : $\mathbf{v}$ 끝 $\to$ $\mathbf{u}$ 끝 $= \mathbf{u} - \mathbf{v}$ (4.1절 벡터의 차)

[읽는 법] $\theta = 90^\circ$ 이면 피타고라스 정리 $c^2 = a^2 + b^2$. 코사인 법칙은 그 일반화다.

성분으로 계산하는 내적 — 왜 그런가 (2/3)

▶ **코사인 법칙 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ 를 벡터로 쓰고, 정의 (4.1) 을 넣는다**

$$\underbrace{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2}_{c^2} = \underbrace{\|\mathbf{u}\|^2}_{a^2} + \underbrace{\|\mathbf{v}\|^2}_{b^2} - 2\underbrace{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta}_{ab\cos\theta}$$

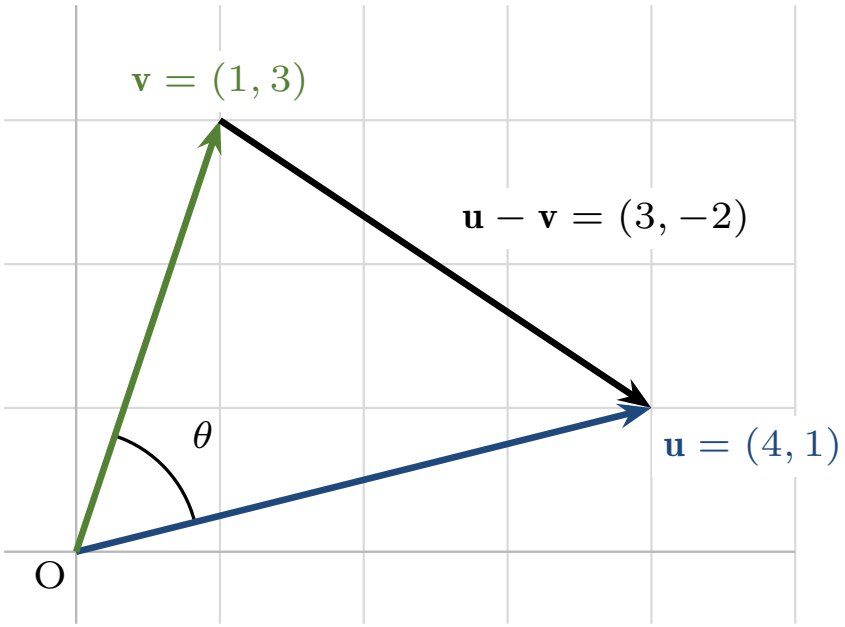
$$= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \qquad \text{정의 (4.1)} : ab\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

▶ **같은 $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$ 을 성분으로 ($\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}-\mathbf{v} = (u_1-v_1,\ u_2-v_2,\ u_3-v_3)$)**

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= (u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + (u_3-v_3)^2 \\ &= (u_1^2+u_2^2+u_3^2) + (v_1^2+v_2^2+v_3^2) - 2(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)\end{aligned}$$

[결론] 두 식의 빨간 부분이 같다 $\Rightarrow$ (4.3) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.
$\mathbb{R}^2$ 는 셋째 성분을 지우면 (4.2) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$.

성분으로 계산하는 내적 — 삼각형으로 확인 (3/3)



▶ **세 변의 길이의 제곱**

$$\|\mathbf{u}\|^2 = 4^2 + 1^2 = 17$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 3^2 + (-2)^2 = 13$$

▶ **코사인 법칙** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

$$\underbrace{13}_{c^2} = \underbrace{17}_{a^2} + \underbrace{10}_{b^2} - 2\,\underbrace{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}_{ab\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{17 + 10 - 13}{2} = 7$$

각 θ 없이 성분으로 바로 : $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 4\cdot 1 + 1\cdot 3 = 4 + 3 = 7$

[직관] $\mathbf{u} = (4, 1)$ 고정이면 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 4v_1 + v_2$ 는 $\mathbf{v}$ 의 일차식 $\Rightarrow$ 부호 경계는 직선.
3장 정리 3-3 (3/3) : 2차 det 도 row 1 고정이면 일차식이라 경계가 직선.
단 det 의 경계는 $\mathbf{u}$ 자신의 직선, 내적의 경계는 $\mathbf{u}$ 에 수직인 직선.

예제 4-8 성분으로 내적 구하기

다음 두 벡터의 내적을 구하라.

(a) $\mathbf{u} = (-2, 0, 3)$, $\mathbf{v} = (0, -9, 1)$ **(b)** $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (-2, 1, 0)$

(c) $\mathbf{u} = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{5})$, $\mathbf{v} = (0, -4, 0)$ **(d)** $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (2020, -9999, 13845)$

▶ **성분끼리 곱해 더한다 — (4.3)** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2)(0) + (0)(-9) + (3)(1) = 0 + 0 + 3 = \boxed{3}$

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(-2) + (2)(1) + (3)(0) = -2 + 2 + 0 = \boxed{0}$

(c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{3}{4}(0) + \left(-\frac{1}{4}\right)(-4) + \frac{3}{5}(0) = 0 + 1 + 0 = \boxed{1}$

(d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot 2020 + 0 \cdot (-9999) + 0 \cdot 13845 = \boxed{0}$

[읽는 법] (b) 는 영 아닌 두 벡터인데 $0 \Rightarrow$ (4.1) $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta = 0$ 에서 $\theta = 90°$.
(d) 영벡터와의 내적은 언제나 0 (정의에서 둔 약속과 같다).

맛보기 — 내적을 행렬 곱으로 쓰기 (1/2)

벡터를 column 벡터(2×1, 3×1 행렬)로 세우면 내적의 성분 공식이 2장의 행렬 곱.

▶ **정리 4-3 (3/3) 의 $\mathbf{u}=(4,1)$, $\mathbf{v}=(1,3)$: $(1\times2)(2\times1)=(1\times1)$**

$$\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}=\begin{bmatrix}4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot1+1\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\end{bmatrix}\qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=7$$

2장 행렬 곱 $c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$ 의 한 칸. 1×1 행렬 $[7]$ 은 수 7 로 본다.

$$\mathbb{R}^3\ :\quad \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

[직관] 내적 = 가로 한 줄 × 세로 한 줄. 거꾸로 2장 행렬 곱의 한 칸 c_{ij} 는 $\mathbf{A}$ 의 row i 와 $\mathbf{B}$ 의 column j 를 성분끼리 곱해 더한 것, 곧 두 줄의 내적이다.

맛보기 — 순서를 바꿔도 같다 (2/2)

▶ 1×1 행렬은 전치해도 자기 자신 ($[7]^{\mathsf{T}} = [7]$), 그리고 2장의 전치 규칙 두 개

$$\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} \overset{\text{(i)}}{=} (\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v})^{\mathsf{T}} \overset{\text{(ii)}}{=} \mathbf{v}^{\mathsf{T}}(\mathbf{u}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \overset{\text{(iii)}}{=} \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$$

(i) 1×1 행렬, (ii) 정리 2-5 : $(\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, (iii) 정리 2-3 (1) : $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$

▶ 앞 쪽의 수로 확인

$$\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = [7] = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$$

성분으로는 $v_1 u_1 + v_2 u_2 = u_1 v_1 + u_2 v_2$: 실수 곱셈의 교환법칙.

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}}$$

[다음] 순서를 바꿔도 같다는 것(뒤의 정리 4-5 (2) 교환법칙)을 행렬 곱으로 본 것이다. 4.4절의 n차원 내적과 내적에 대한 행렬공식의 증명에서 이 식을 다시 쓴다.

두 벡터의 사잇각

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \iff \theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \quad (0 \le \theta \le \pi)}$$

(4.1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$ 의 양변을 $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ $(\neq 0)$ 로 나눈 것.

▶ 거꾸로 가 보기 — 돌려 보기의 $60°$ 벡터를 성분으로

$$\mathbf{u} = (8, 0), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \quad : \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 8\cdot\frac{5}{2} + 0\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2} = 20$$

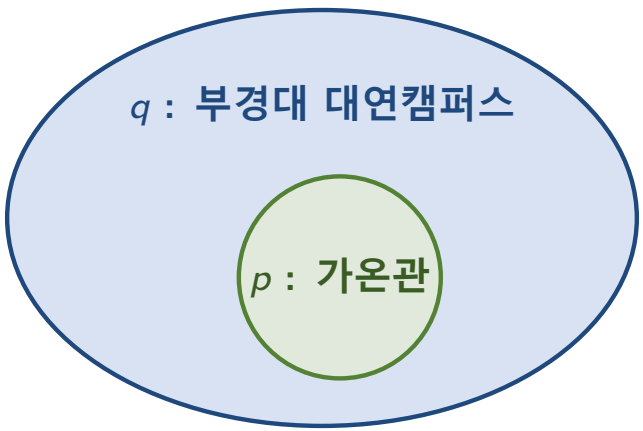
$$\|\mathbf{u}\| = 8, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{75}{4}} = \sqrt{25} = 5 \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{20}{8\cdot 5} = \frac{1}{2}$$

$\theta = \mathbf{60°}$ $\quad (\cos 300°$ 도 같은 값이지만 $300°$ 는 $[0°, 180°]$ 밖$)$

[계산 순서] 내적 $\to$ 두 크기 $\to$ 나누기 $\to \cos^{-1}$. 범위를 $[0, \pi]$ 로 묶어야 답이 하나다.

필요조건과 충분조건 — 포함 관계로 보기 (1/2)

"p 이면 항상 q" 를 $p \Rightarrow q$ 로 쓴다. p 는 q 이기 위한 **충분조건**(sufficient condition), q 는 p 이기 위한 **필요조건**(necessary condition)이다.



$p \Rightarrow q$: p 가 q 안에 들어 있다

▶ **p 는 q 의 충분조건 (프리패스)**

가온관이면 대연캠퍼스는 저절로 따라온다.

▶ **q 는 p 의 필요조건 (입장권)**

대연캠퍼스 밖이면 가온관일 수 없다.
그러나 대연캠퍼스라고 모두 가온관은 아니다.

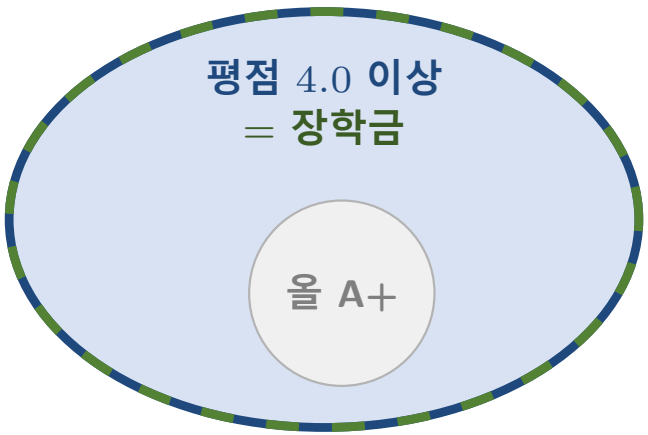
▶ **같은 꼴 : 부산 $\Rightarrow$ 한국**

부산은 한국의 충분조건, 한국은 부산의 필요조건.

[영어] "q if p" = "p only if q" = $p \Rightarrow q$. if 뒤 = 충분조건, only if 뒤 = 필요조건.
예 : "대연캠퍼스 if 가온관" = "가온관 only if 대연캠퍼스".

필요충분조건 — 양쪽 화살표 (2/2)

$p \Rightarrow q$ 와 $q \Rightarrow p$ 가 둘 다 성립하면 $p \Leftrightarrow q$ 로 쓴다. 두 집합이 같다.
이때 p 를 q 이기 위한 **필요충분조건**(necessary and sufficient condition)이라 한다.



규정 : 4.0 이상 지급, 미만 없음
겹친 경계 : $\Leftrightarrow$, 안쪽 원 : $\Rightarrow$ 만

▶ **올 A+ $\Rightarrow$ 장학금 : 충분조건**

필요조건은 아니다. 평점 4.1 도 받는다.

▶ **평점 4.0 이상 $\Leftrightarrow$ 장학금 : 필요충분조건**

▶ **수학의 필요충분조건**

정리 4-2 (1) (4.1절, 이미 썼다) : $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
정리 3-12 : $\mathbf{A}$ 가역 $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$
정리 4-4 (다음 쪽) : 영 아닌 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 직교 $\Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

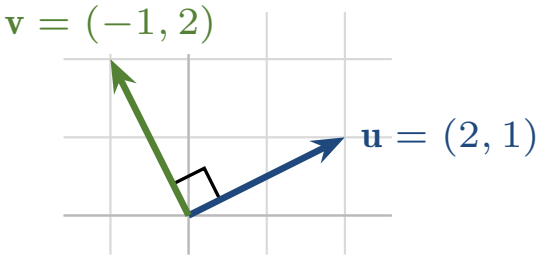
[영어] "p if and only if q" (줄여서 iff) $= p \Leftrightarrow q$.
그래서 증명도 $\Rightarrow$ 와 $\Leftarrow$ 두 방향을 모두 보인다.

두 벡터의 직교 — 정리 4-4

사잇각이 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 이면 두 벡터는 **직교**(orthogonal)한다고 한다.
$\theta = 0$ 또는 π 이면 4.1절의 평행이고, 이때 $\cos\theta = \pm 1$ 이라 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \pm\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$.

CONCEPT 정리 4-4

영 아닌 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 가 직교할 필요충분조건은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ 이다.



$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (2)(-1) + (1)(2) = 0$

▶ **왜 그런가 — 내적의 정의 (4.1) 에서**

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{>0}\underbrace{\|\mathbf{v}\|}_{>0}\cos\theta = 0$$

$$\iff \cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$$

단계마다 양방향(두 크기 > 0, $[0,\pi]$ 에서 $\cos\theta = 0$ 은 $\frac{\pi}{2}$ 뿐) : $\Leftrightarrow$ 사슬 하나로 $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ 두 방향.

[주의] 영벡터는 각이 없어 정리에서 뺀다. 내적 0 이 곧 영벡터라는 뜻은 아니다(그림).

예제 4-9 두 벡터 사이의 각 (1/2)

다음 두 벡터 사이의 각 θ 를 구하라.

(a) $\mathbf{u} = (9, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 18)$

(b) $\mathbf{u} = (-1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$

(c) $\mathbf{u} = (-2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (2, -1, -3)$

(d) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

▶ **(a) 내적이 0 이면 크기를 구할 필요가 없다**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (9)(4) + (-2)(18) = 36 - 36 = 0 \xrightarrow{\text{정리 4-4}} \theta = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

▶ **(b) 내적 $\rightarrow$ 두 크기 $\rightarrow$ 나누기**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(-1) + (2)(1) + (2)(0) = 1 + 2 + 0 = 3$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

예제 4-9 두 벡터 사이의 각 (2/2)

SOLUTION 4-9

▶ **(c)** $\mathbf{u} = (-2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (2, -1, -3)$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2)(2) + (1)(-1) + (3)(-3) = -4 - 1 - 9 = -14$$

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14} \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{-14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = -1 \;\Rightarrow\; \theta = \boxed{\pi}$$

▶ **(d)** $\mathbf{u} = (-1, 2, -3)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$ **로 읽는다**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(2) + (2)(1) + (-3)(-2) = -2 + 2 + 6 = 6$$

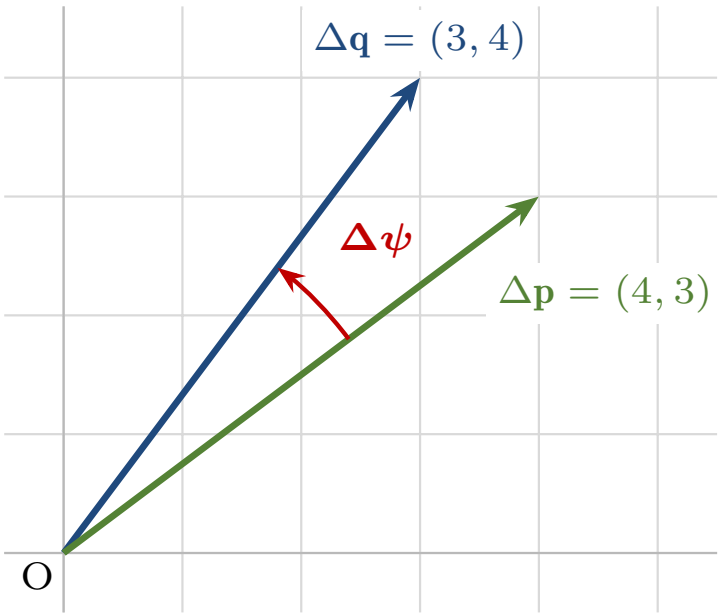
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{6}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \approx 0.5345 \;\Rightarrow\; \theta = \boxed{\cos^{-1}\frac{\sqrt{14}}{7} \approx 57.69^\circ}$$

[읽는 법] (c) 는 $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$ 이다. 한 직선 위에서 반대 방향이라 π 가 맞다.

사잇각의 쓰임 — 방향 추정

로봇의 이동을 위성 측위(GNSS)로 잰 $\Delta\mathbf{q} = (3, 4)$, 바퀴 회전수로 추측한 $\Delta\mathbf{p} = (4, 3)$.



▶ 어긋난 각 — 내적으로

$$\Delta\mathbf{q} \cdot \Delta\mathbf{p} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$$

$$\|\Delta\mathbf{q}\| = \|\Delta\mathbf{p}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\cos\Delta\psi = \frac{24}{5 \cdot 5} = 0.96 \;\Rightarrow\; \Delta\psi \approx \mathbf{16.3^\circ}$$

▶ 어느 쪽으로 — 3장 행렬식의 부호

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 16 = -7 < 0$$

row 1 → row 2 가 시계 방향 (3.2절 정리 3-3)

[쓰임] 추측한 방향을 반시계로 16.3° 돌려 바로잡는다.
각의 크기는 내적이, 도는 방향은 행렬식의 부호가 알려 준다.

내적의 성질 — 정리 4-5 (1/3)

CONCEPT 정리 4-5

좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 또는 좌표공간 $\mathbb{R}^3$ 위의 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 와 스칼라 k 에 대하여

(1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0,\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0 \Leftrightarrow \mathbf{u}=\mathbf{0}$

(2) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

(3) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

(4) $(k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v})=k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

▶ 왜 그런가 — 성분 공식 (4.3) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$ 으로 풀면 실수의 성질

(1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=u_1^2+u_2^2+u_3^2=\|\mathbf{u}\|^2\geq 0$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0 \Leftrightarrow u_1=u_2=u_3=0 \Leftrightarrow \mathbf{u}=\mathbf{0}$

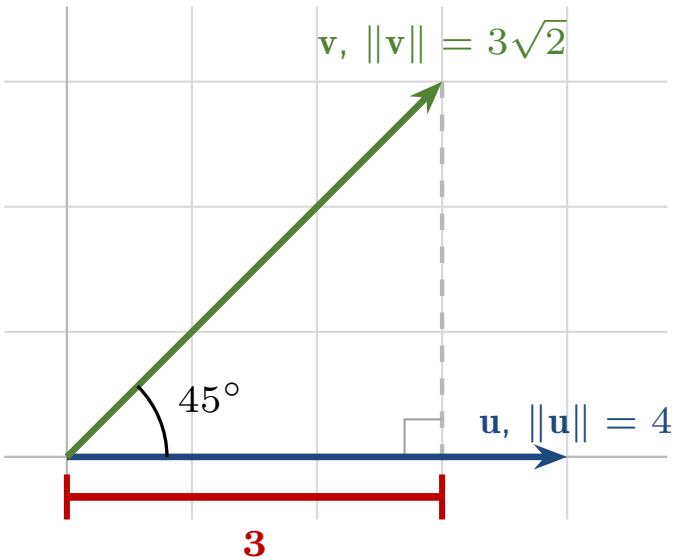
(2) $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3$

(3) $(u_1+v_1)w_1+\cdots+(u_3+v_3)w_3=(u_1w_1+\cdots+u_3w_3)+(v_1w_1+\cdots+v_3w_3)$

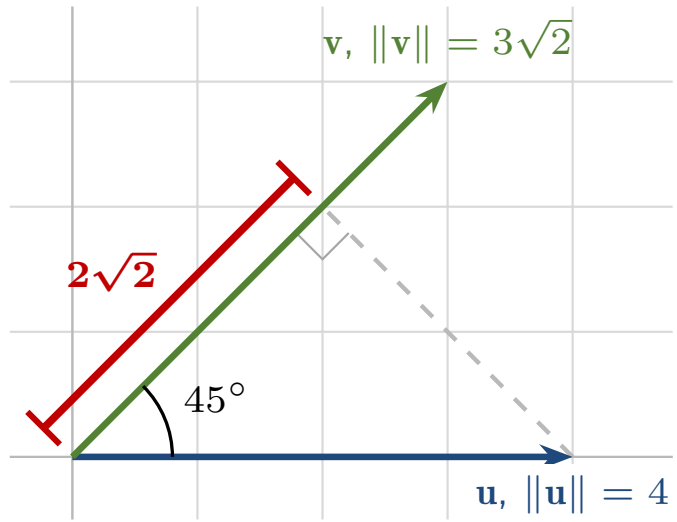
(4) $(ku_1)v_1+\cdots+(ku_3)v_3=u_1(kv_1)+\cdots+u_3(kv_3)=k(u_1v_1+\cdots+u_3v_3)$

내적의 성질 — 교환법칙을 그림으로 (2/3)

(2) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$: 어느 쪽을 어느 쪽 위로 정사영해도 곱은 같다. $\mathbf{u}=(4,0)$, $\mathbf{v}=(3,3)$.



$$\|\mathbf{u}\|\times(\|\mathbf{v}\|\cos 45^\circ)=4\times 3=12$$



$$\|\mathbf{v}\|\times(\|\mathbf{u}\|\cos 45^\circ)=3\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=12$$

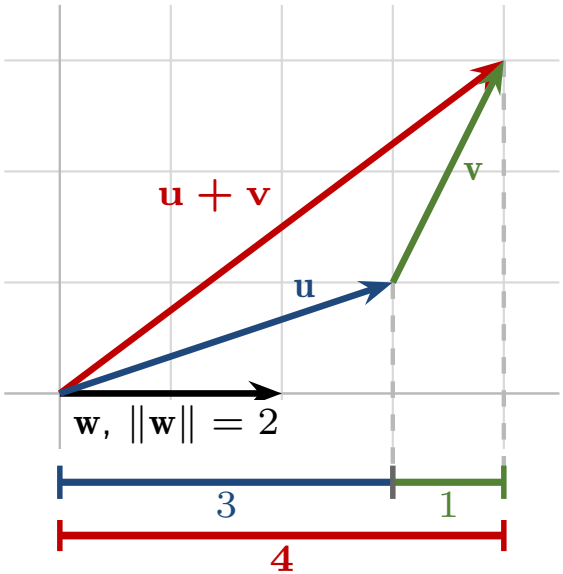
빨간 괄호 : 정사영의 길이

[직관] 얼마나 평행한가는 어느 쪽에서 재도 같다. 그래서 순서를 바꿔도 내적이 같다.

내적의 성질 — 정사영으로 보는 분배법칙 (3/3)

한 벡터와의 내적 = (그 벡터의 크기) × (그 직선 위로의 정사영의 부호 있는 길이).

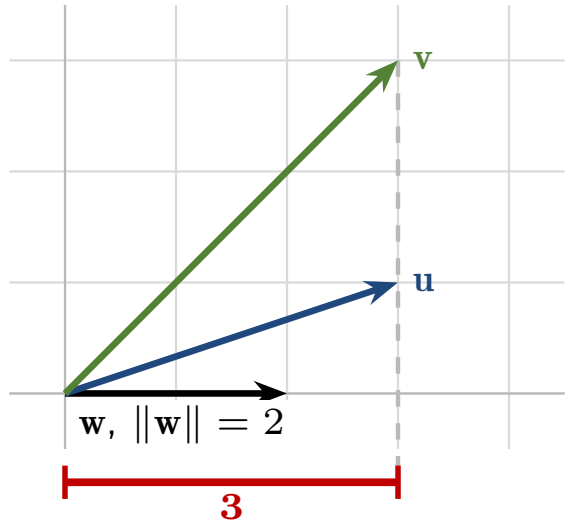
(3) 정사영의 길이는 더해진다



$\mathbf{w} = (2, 0),\ \mathbf{u} = (3, 1),\ \mathbf{v} = (1, 2)$

$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 2 \times 4 = 2 \times 3 + 2 \times 1$

정사영이 같아도 벡터는 다르다



$\mathbf{w} = (2, 0),\ \mathbf{u} = (3, 1),\ \mathbf{v} = (3, 3)$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2 \times 3 = 6$

[주의] 내적은 정사영만 본다. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ 여도 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ 라고 할 수 없다(오른쪽, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$).

예제 4-10 내적의 성질 확인 (1/2)

벡터 $\mathbf{u} = (-5, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 5, -3)$, $\mathbf{w} = (4, 1, 0)$ 에 대하여 다음을 구하라.

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, $\|\mathbf{u}\|^2$ **(b)** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$

(c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ **(d)** $(-2\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot (-2\mathbf{v})$

▶ (a) 자기 자신과의 내적

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (-5)^2 + 2^2 + (-1)^2 = 25 + 4 + 1 = \boxed{30}$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \left(\sqrt{25 + 4 + 1}\right)^2 = \boxed{30}$$

▶ (b) 순서를 바꿔서

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (-5)(4) + (2)(1) + (-1)(0) = -20 + 2 + 0 = \boxed{-18}$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = (4)(-5) + (1)(2) + (0)(-1) = -20 + 2 + 0 = \boxed{-18}$$

[확인] (a) 는 정리 4-5 (1) 의 증명에서 본 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$, (b) 는 (2) 교환법칙.

예제 4-10 내적의 성질 확인 (2/2)

SOLUTION 4-10

▶ **(c) 더한 뒤 내적 vs 내적한 뒤 더하기**

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(-5+0,\ 2+5,\ -1-3)=(-5,7,-4)$$

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=(-5)(4)+(7)(1)+(-4)(0)=-20+7+0=\boxed{-13}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=(0)(4)+(5)(1)+(-3)(0)=5\ \Rightarrow\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=-18+5=\boxed{-13}$$

▶ **(d) -2 를 어느 쪽에 곱해도**

$$(-2\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=(10,-4,2)\cdot(0,5,-3)=0-20-6=\boxed{-26}$$

$$\mathbf{u}\cdot(-2\mathbf{v})=(-5,2,-1)\cdot(0,-10,6)=0-20-6=\boxed{-26}$$

[확인] (c) 는 정리 4-5 (3) 분배법칙, (d) 는 (4).
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0+10+3=13$ 이라 $-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=-26$ 과도 같다.

성분 공식을 다른 길로 — 표준단위벡터로 풀기

$\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$: 분배 · 교환법칙(정리 4-5 (3)(2))으로 풀면 9 항.
스칼라 곱 (4) 로 수를 꺼내면 **9 항 모두 표준단위벡터끼리의 내적**.
예 : $(4\mathbf{i}) \cdot (5\mathbf{j}) = 20\,(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j})$. 이 내적은 정의 (4.1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$ 로 계산한다.

같은 것 $\quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$

서로 직교 $\quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$

	$3\mathbf{i}$	$5\mathbf{j}$	$6\mathbf{k}$
$4\mathbf{i}$	$12\,(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) = \mathbf{12}$	$20\,(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) = 0$	$24\,(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) = 0$
$2\mathbf{j}$	$6\,(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) = 0$	$10\,(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) = \mathbf{10}$	$12\,(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) = 0$
$3\mathbf{k}$	$9\,(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) = 0$	$15\,(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) = 0$	$18\,(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = \mathbf{18}$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 12 + 10 + 18 = 40 = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$ 성분 공식 (4.3) 과 같다

[주의] 정리 4-5 를 성분 공식 (4.3) 으로 증명했으므로 정리 4-3 의 증명이 아니라 **확인**.

방향각과 방향코사인 (1/4)

CONCEPT 정의

영 아닌 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 가 x축, y축, z축의 양의 방향($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$)과 이루는 사잇각 α, β, γ 를 **방향각**(direction angle),
$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 를 **방향코사인**(direction cosine)이라 한다.

▶ **어디서 나오나 — $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ 과의 내적을 두 가지로 (β, γ 도 같은 방법)**

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{i}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\alpha = \|\mathbf{v}\| \cos\alpha \qquad \text{정의 (4.1), } \|\mathbf{i}\| = 1$$

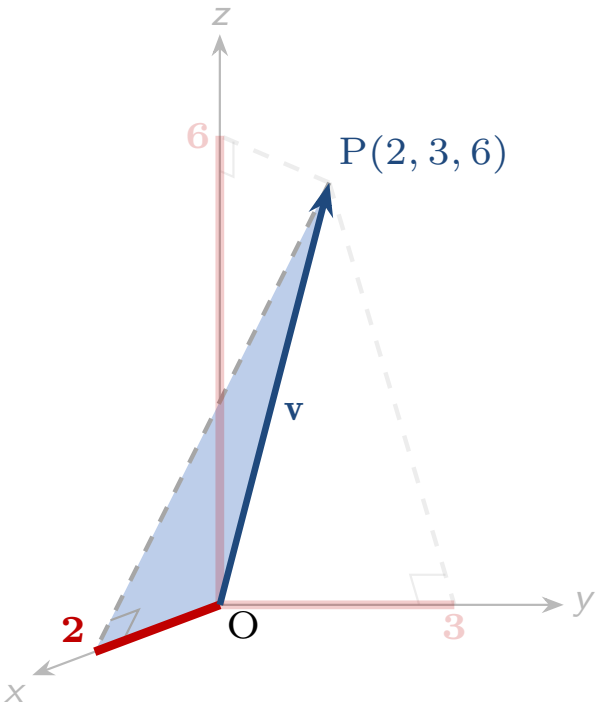
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} = (1)(v_1) + (0)(v_2) + (0)(v_3) = v_1 \qquad \text{성분 공식 (4.3)}$$

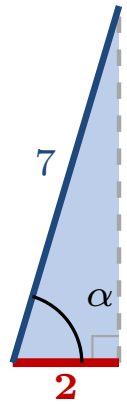
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad \cos\beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad \cos\gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}}$$

[직관] 어떤 벡터의 특정 방향 성분을 알고 싶다면, 그 방향의 단위벡터와 내적
$\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} = v_1$ 은 $\mathbf{v}$ 의 x축 방향 성분이고, $\cos\alpha$ 는 그것을 크기 $\|\mathbf{v}\|$ 로 나눈 비율이다.

방향각과 방향코사인 — $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$ 로 보기 (2/4)

P 에서 각 축으로 수선을 내리면 빗변이 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$ 인 직각삼각형 셋.

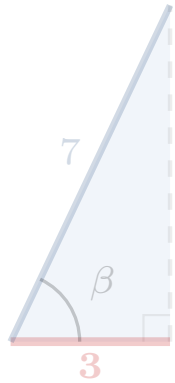




x축 쪽

$\cos\alpha = \frac{2}{7}$

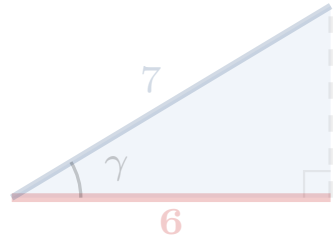
$\alpha \approx 73.4°$



y축 쪽

$\cos\beta = \frac{3}{7}$

$\beta \approx 64.6°$



z축 쪽

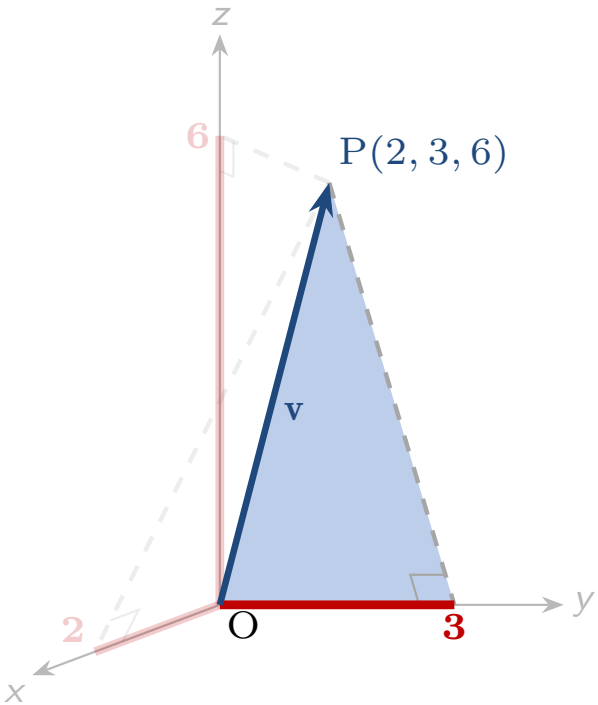
$\cos\gamma = \frac{6}{7}$

$\gamma \approx 31.0°$

[읽는 법] 직각삼각형 O, $(2, 0, 0)$, P : 밑변 $v_1 = 2$, 빗변 $\|\mathbf{v}\| = 7 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{7}$.
밑변은 $\mathbf{v}$ 를 x축 위로 내린 정사영의 부호 있는 길이, 곧 x 성분이다.

방향각과 방향코사인 — $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$ 로 보기 (3/4)

P 에서 각 축으로 수선을 내리면 빗변이 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$ 인 직각삼각형 셋.

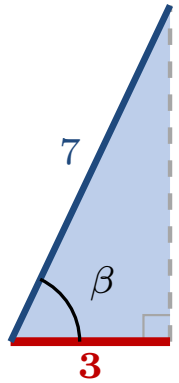




x축 쪽

$\cos\alpha = \frac{2}{7}$

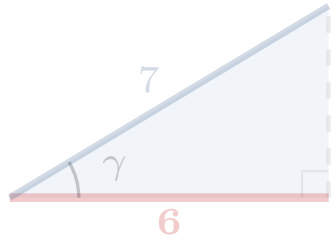
$\alpha \approx 73.4°$



y축 쪽

$\cos\beta = \frac{3}{7}$

$\beta \approx 64.6°$



z축 쪽

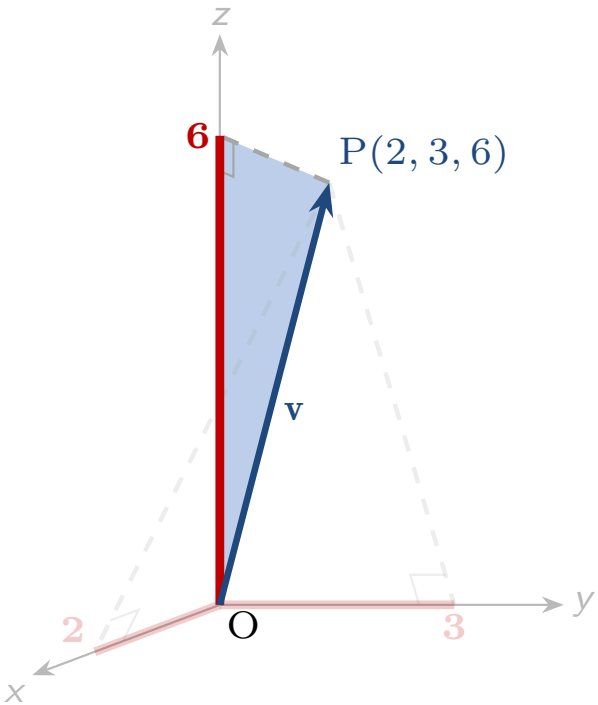
$\cos\gamma = \frac{6}{7}$

$\gamma \approx 31.0°$

[읽는 법] 직각삼각형 O, $(0, 3, 0)$, P : 밑변 $v_2 = 3$, 빗변 $\|\mathbf{v}\| = 7 \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{7}$.
세 삼각형은 빗변 7 을 같이 쓰고 밑변(성분)만 다르다.

방향각과 방향코사인 — $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$ 로 보기 (4/4)

P 에서 각 축으로 수선을 내리면 빗변이 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$ 인 직각삼각형 셋.

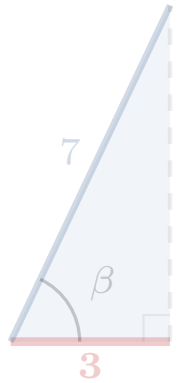




x축 쪽

$\cos\alpha = \frac{2}{7}$

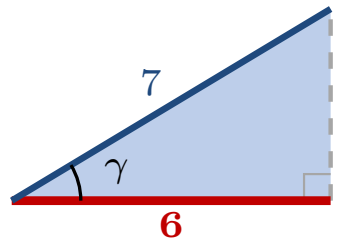
$\alpha \approx 73.4°$



y축 쪽

$\cos\beta = \frac{3}{7}$

$\beta \approx 64.6°$



z축 쪽

$\cos\gamma = \frac{6}{7}$

$\gamma \approx 31.0°$

[확인] $\cos\gamma = \frac{6}{7}$. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49} = 1$.

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ 는 $\mathbf{v}$ 를 정규화한 단위벡터라서 제곱의 합이 1 이다.

예제 4-11 방향코사인 구하기

벡터 $\mathbf{v} = (1,\, 2,\, 3)$ 의 방향코사인 $\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma$ 를 구하라.

▶ 크기를 구해 각 성분을 나눈다

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \approx 0.267, \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \approx 0.535, \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}} \approx 0.802$$

각으로는 $\alpha \approx 74.5^\circ$, $\beta \approx 57.7^\circ$, $\gamma \approx 36.7^\circ$. z 성분이 가장 커서 z축과 가장 가깝다.

▶ 검산 — 제곱의 합

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{14} = \frac{1 + 4 + 9}{14} = \frac{14}{14} = 1$$

[확인] 제곱의 합 1 은 $\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$ 의 크기가 1 이라는 뜻. 앞의 $\frac{1}{7}(2, 3, 6)$ 과 같은 꼴.

Chapter 4. n차원 실벡터

4.1 벡터의 정의

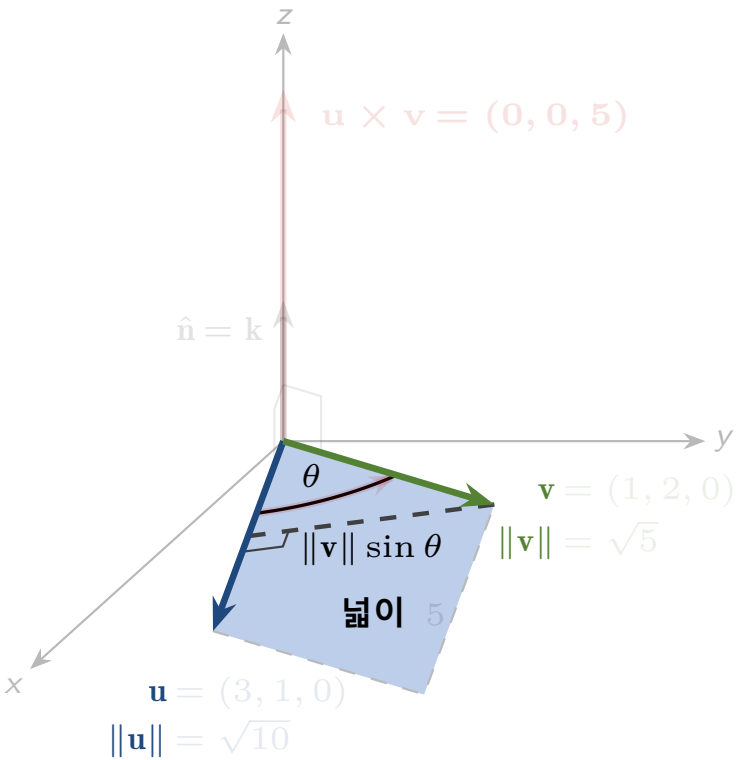
4.2 내적

4.3 외적

4.4 n차원 벡터

4.5 벡터의 활용

외적의 정의 — 크기는 평행사변형의 넓이 (1/3)



비스듬히 본 그림 (실제 사잇각 $45°$)

CONCEPT 정의

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 의 **외적**(cross product)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta \, \hat{\mathbf{n}}$$

θ : 사잇각 $(0 \le \theta \le \pi)$

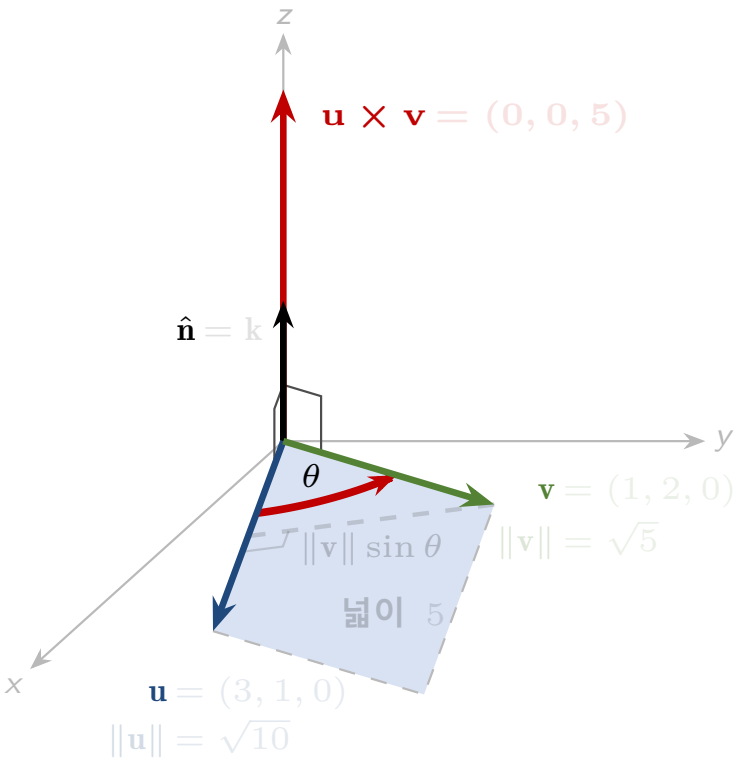
$\hat{\mathbf{n}}$: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 에 수직인 단위벡터(오른손 법칙)

크기 : 밑변 $\|\mathbf{u}\|$ × 높이 $\|\mathbf{v}\| \sin\theta$ = 넓이

방향 $\hat{\mathbf{n}}$: $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$ 로 감은 오른손 엄지

[직관] 얼마나 수직인가: 두 크기를 고정하면 수직일 때 가장 길고, 한 직선 위이면 $\mathbf{0}$.

외적의 정의 — 방향은 오른손 법칙 (2/3)



비스듬히 본 그림 (실제 사잇각 $45°$)

CONCEPT 정의

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 의 **외적**(cross product)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta \;\; \hat{\mathbf{n}}$$

θ : 사잇각 $(0 \le \theta \le \pi)$

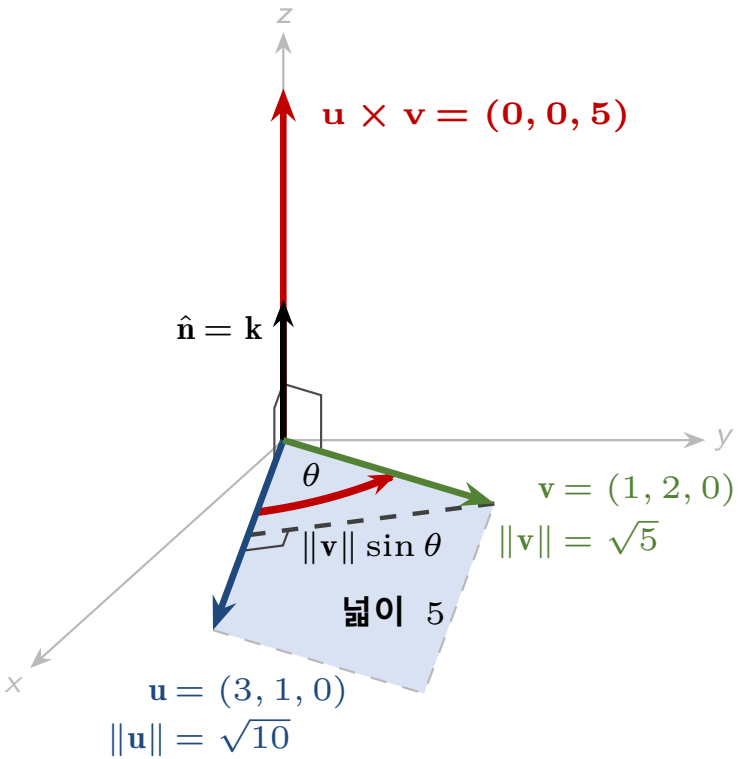
$\hat{\mathbf{n}}$: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 에 수직인 단위벡터(오른손 법칙)

크기 : 밑변 $\|\mathbf{u}\|$ × 높이 $\|\mathbf{v}\| \sin\theta$ = 넓이

방향 $\hat{\mathbf{n}}$: $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$ 로 감은 오른손 엄지

[오른손 법칙] 순서를 바꾸면 손가락이 반대로 감겨 엄지도 반대: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

외적의 정의 — $\mathbf{u} = (3, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$ 로 보기 (3/3)



비스듬히 본 그림 (실제 사잇각 $45°$)

CONCEPT 정의

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 의 **외적**(cross product)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta \;\; \hat{\mathbf{n}}$$

θ : 사잇각 $(0 \le \theta \le \pi)$

$\hat{\mathbf{n}}$: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 에 수직인 단위벡터(오른손 법칙)

크기 : 밑변 $\|\mathbf{u}\|$ × 높이 $\|\mathbf{v}\| \sin\theta$ = 넓이

방향 $\hat{\mathbf{n}}$: $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$ 로 감은 오른손 엄지

[3장] 넓이 5 = 3.1절 2차 행렬식 $3 \cdot 2 - 1 \cdot 1$ ⇒ 성분만으로는 행렬식으로 구한다.

외적의 성분 공식 — 행렬식으로 계산 (1/4)

CONCEPT 성분 공식

정의의 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 를 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 의 성분으로 쓰면

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(u_2v_3-u_3v_2,\quad u_3v_1-u_1v_3,\quad u_1v_2-u_2v_1)$$

성분마다 2차 행렬식으로 쓰면

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\right)$$

정의와 같은 벡터: 크기는 정리 4-7 (3), 수직은 정리 4-7 (1)(2), 방향은 표준단위벡터의 외적 쪽.

▶ **예 — 정의 (3/3) 의 $\mathbf{u}=(3,1,0)$, $\mathbf{v}=(1,2,0)$: 크기 5, 방향 $+z$ 그대로**

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(1\cdot0-0\cdot2,\quad 0\cdot1-3\cdot0,\quad 3\cdot2-1\cdot1)=(0,0,5)$$

[3장] 세 성분의 2차 행렬식 = 3장 3차 행렬식의 row 1 여인자 A_{11}, A_{12}, A_{13}.

외적의 성분 공식 — 3장의 3차 행렬식에서 (2/4)

3장: 3차 행렬식 = 세 row 의 평행육면체의 **부호 있는 부피** (증명은 정리 4-8).

▶ **row 1 에 아무 벡터 $\mathbf{w}$, row 2 · 3 에 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — row 1 에 대한 여인자 전개 (3.6)**

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = w_1 A_{11} + w_2 A_{12} + w_3 A_{13}$$

▶ **여인자 셋에는 $\mathbf{w}$ 가 없다 — row 2 · 3 ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) 만으로 정해진다**

$$A_{11} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

성분 공식 (1/4) 의 세 성분 그대로다. A_{12} 의 $-$ 는 여인자의 부호 $(-1)^{1+2}$.

$$(A_{11}, A_{12}, A_{13}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad w_1 A_{11} + w_2 A_{12} + w_3 A_{13} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

[직관] 외적 = 부피 행렬식에서 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 가 정하는 부분. $\mathbf{w}$ 와 내적하면 부호 있는 부피.

외적의 성분 공식 — 행렬식으로 기억 (3/4)

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ u_1&u_2&u_3\\ v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2&u_3\\ v_2&v_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\ v_1&v_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\ v_1&v_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

▶ **row 1 의 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 는 4.1절의 표준단위벡터** $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

row 1 로 전개하면 여인자 A_{11},A_{12},A_{13} 이 각각 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 에 곱해진다
(row 1 에 $\mathbf{w}$ 를 둔 $w_1A_{11}+w_2A_{12}+w_3A_{13}$ 과 같은 꼴).

$$A_{11}\mathbf{i}+A_{12}\mathbf{j}+A_{13}\mathbf{k}=(A_{11},\,A_{12},\,A_{13})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$$

이 행렬식 전체는 수(부피)가 아니라 벡터. **성분 하나하나**가 부호 있는 부피($\mathbf{w}=\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 로 둔 부피).

[왜 $\mathbb{R}^3$ 에서만] 행렬식은 정사각행렬에만 있다(3장).
row 1 $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ 아래에 두 벡터를 쌓아 정사각이 되려면 성분이 3 개여야 한다.

외적의 성분 공식 — 같은 예로 두 행렬식 (4/4)

정의 (3/3) 의 $\mathbf{u} = (3, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$ 을 row 2 · 3 에 두고 row 1 만 바꾼다.

▶ **row 1 = 표준단위벡터 ⇒ 벡터**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} - 0\,\mathbf{j} + \mathbf{5}\,\mathbf{k}$$
$$= (0, 0, 5) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

▶ **row 1 = 벡터 $\mathbf{w}$ ⇒ 부호 있는 부피**

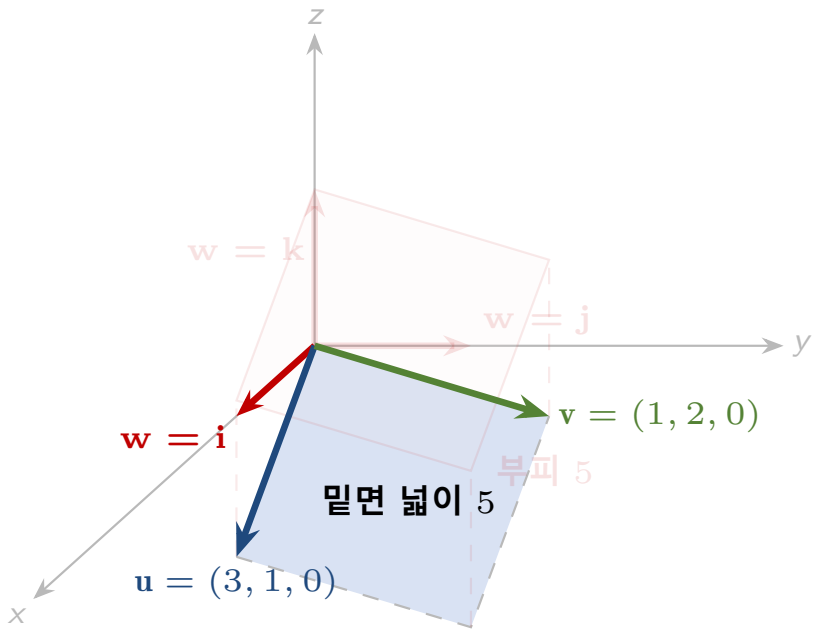
$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\,w_1 - 0\,w_2 + \mathbf{5}\,w_3$$
$$= \mathbf{w} \cdot (0, 0, 5)$$

▶ **같은 여인자 셋 — row 2 · 3 만으로 정해진다**

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{5}$$

[직관] row 1 만 바꿔도 여인자 $(0, 0, 5)$ 는 같다: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 면 벡터 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 면 부피 $5w_3$.

외적의 세 성분 — $\mathbf{w}$ 에 표준단위벡터 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (1/3)



$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5\,w_3$$

$\mathbf{w} = \mathbf{i}$: 밑면에 누움, 높이 $0 \to$ 첫째 0

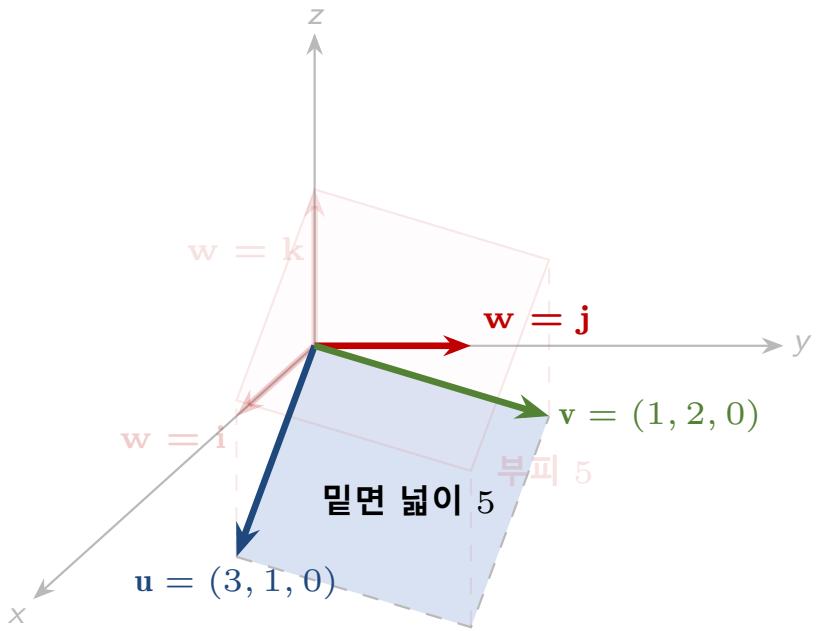
$\mathbf{w} = \mathbf{j}$: 밑면에 누움, 높이 $0 \to$ 둘째 0

$\mathbf{w} = \mathbf{k}$: 높이 $1 \to 5 \times 1 =$ 셋째 5

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\mathbf{0},\ 0,\ 5)$$

[직관] 부호 있는 부피 $5w_3$ = 밑면 넓이 5 × 부호 있는 높이 w_3 ($\mathbf{w}$ 의 z 성분).

외적의 세 성분 — $\mathbf{w}$ 에 표준단위벡터 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (2/3)



$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5\, w_3$$

$\mathbf{w} = \mathbf{i}$: 밑면에 누움, 높이 $0 \to$ 첫째 0

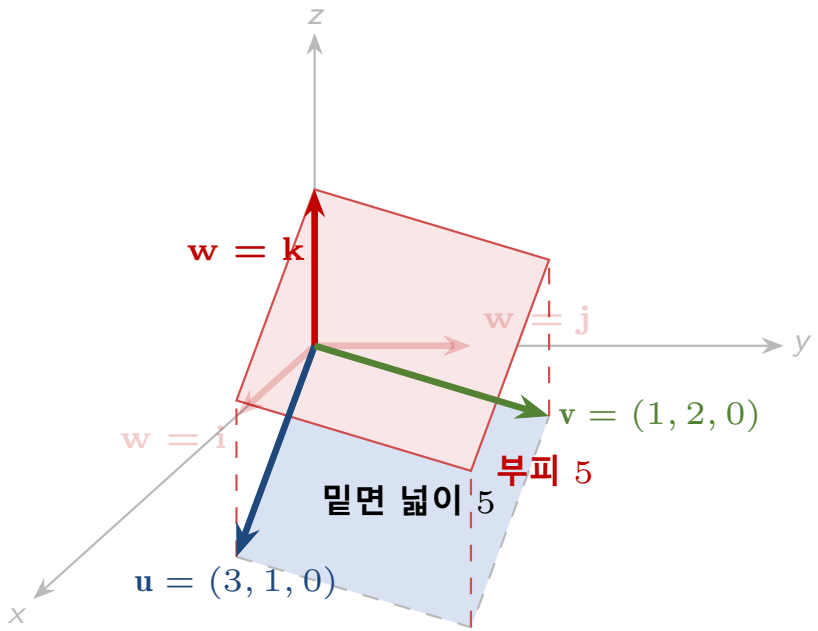
$\mathbf{w} = \mathbf{j}$: 밑면에 누움, 높이 $0 \to$ 둘째 0

$\mathbf{w} = \mathbf{k}$: 높이 $1 \to 5 \times 1 =$ 셋째 5

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0,\ \mathbf{0},\ 5)$$

[직관] 부호 있는 부피 $5w_3$ = 밑면 넓이 5 × 부호 있는 높이 w_3 ($\mathbf{w}$ 의 z 성분).

외적의 세 성분 — $\mathbf{w}$ 에 표준단위벡터 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (3/3)



$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5\, w_3$$

$\mathbf{w} = \mathbf{i}$: 밑면에 누움, 높이 $0 \to$ 첫째 0

$\mathbf{w} = \mathbf{j}$: 밑면에 누움, 높이 $0 \to$ 둘째 0

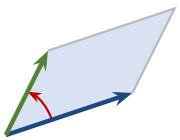
$\mathbf{w} = \mathbf{k}$: 높이 $1 \to 5 \times 1 =$ 셋째 5

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0,\ 0,\ \mathbf{5})$$

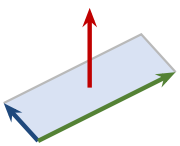
[직관] 부호 있는 부피 $5w_3$ = 밑면 넓이 5 × 부호 있는 높이 w_3 ($\mathbf{w}$ 의 z 성분).

왜 외적인가 — 행렬식이 못 하는 것

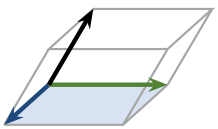
행렬식은 수, 외적은 벡터 = 넓이 + 그 평면의 **방향**(행렬식에 없는 정보).



2차 행렬식 평면의 벡터 둘 $\to$ 수 : 부호 있는 넓이



외적 공간의 벡터 둘 $\to$ **벡터** :
크기 = 넓이, 방향 = 두 벡터의 평면에 수직



3차 행렬식 공간의 벡터 셋 $\to$ 수 : 부호 있는 부피
$= \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (외적에 셋째 벡터 $\mathbf{w}$ 를 내적)

▶ **xy 평면의 두 벡터 — 2차 행렬식 = 외적의 z 성분, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = |$2차 행렬식$|$**

$$(u_1, u_2, 0) \times (v_1, v_2, 0) = \left(0,\ 0,\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)$$

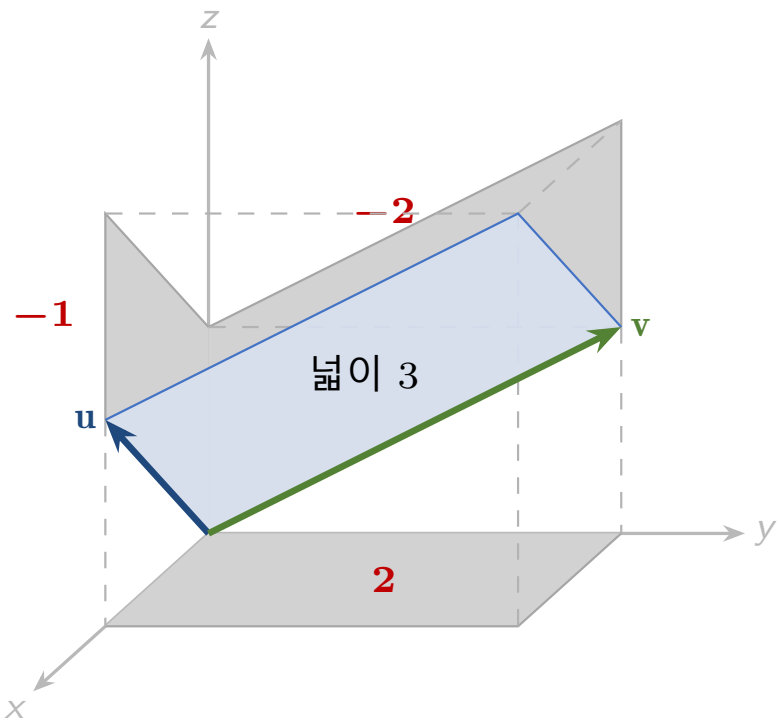
예 : $(3, 1, 0) \times (1, 2, 0) = (0, 0, 5)$

[기울어지면] $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$: 좌표평면에 눕지 않고, 2×3 이라 행렬식이 없다.
외적 $(-2, -1, 2)$: 크기 3 = 넓이, 방향은 그 평면에 수직.

외적의 성분 — 세 좌표평면으로의 정사영 (1/4)

$\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$ 의 평행사변형을 세 좌표평면 위로 수직으로 내린다(정사영).

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (\mathbf{-2},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{2})$$



▶ **평행사변형의 넓이 = 외적의 크기**

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

▶ **세 성분 = 세 평면으로의 정사영 넓이**

yz 평면($\perp \mathbf{i}$) → **첫째 성분**

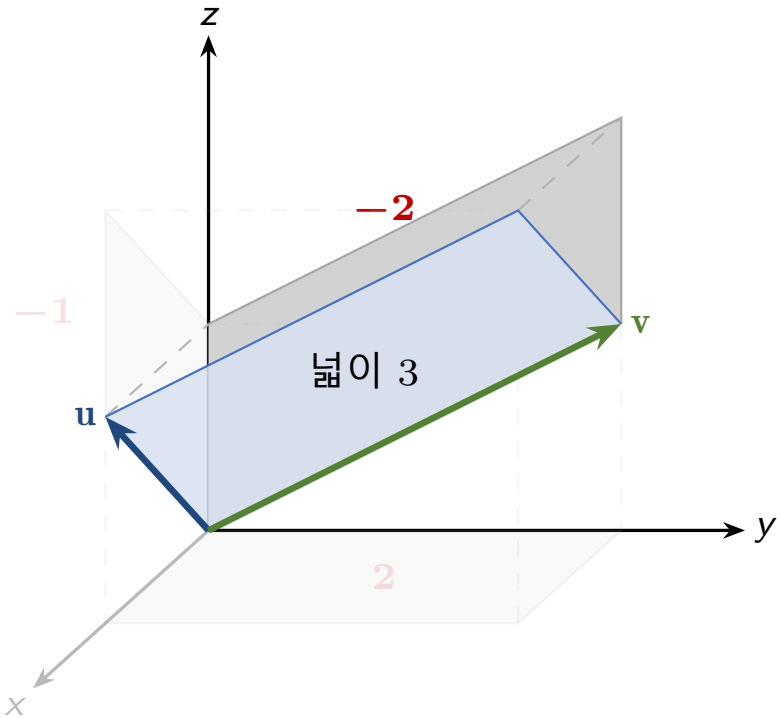
zx 평면($\perp \mathbf{j}$) → **둘째 성분**

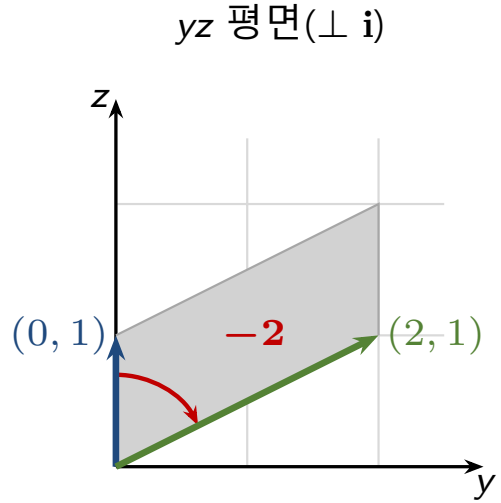
xy 평면($\perp \mathbf{k}$) → **셋째 성분**

외적의 성분 — 세 좌표평면으로의 정사영 (2/4)

$\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$ 의 평행사변형을 세 좌표평면 위로 수직으로 내린다(정사영).

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (\mathbf{-2},\ -1,\ 2)$$



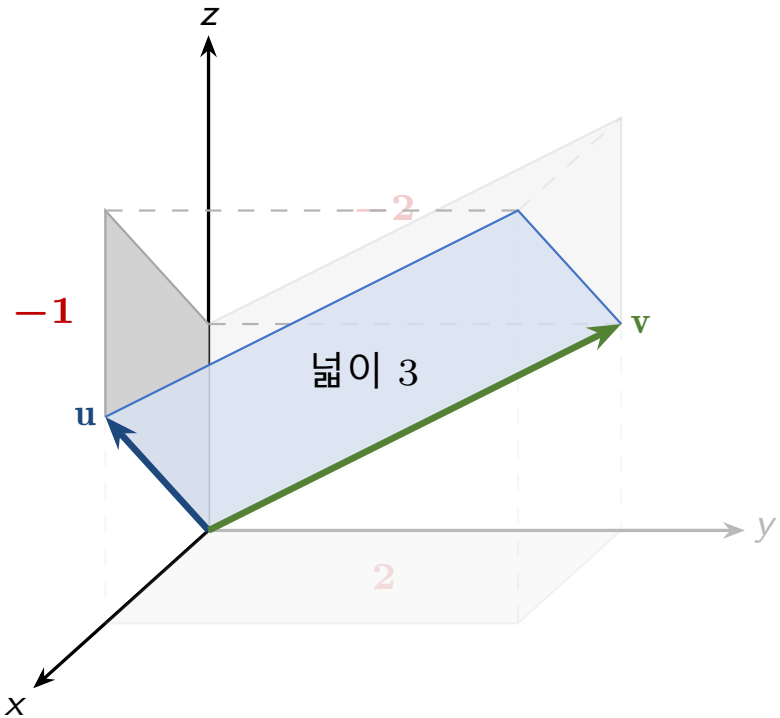


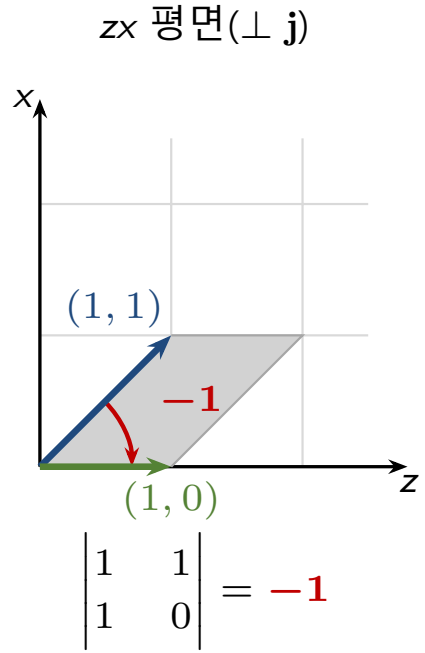
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{-2}$$

외적의 성분 — 세 좌표평면으로의 정사영 (3/4)

$\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$ 의 평행사변형을 세 좌표평면 위로 수직으로 내린다(정사영).

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2,\ -1,\ 2)$$



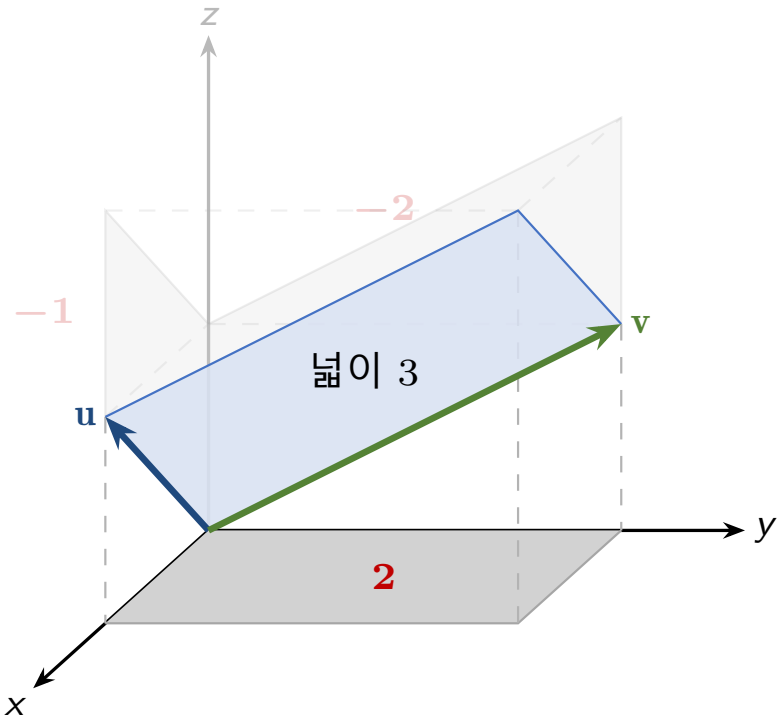


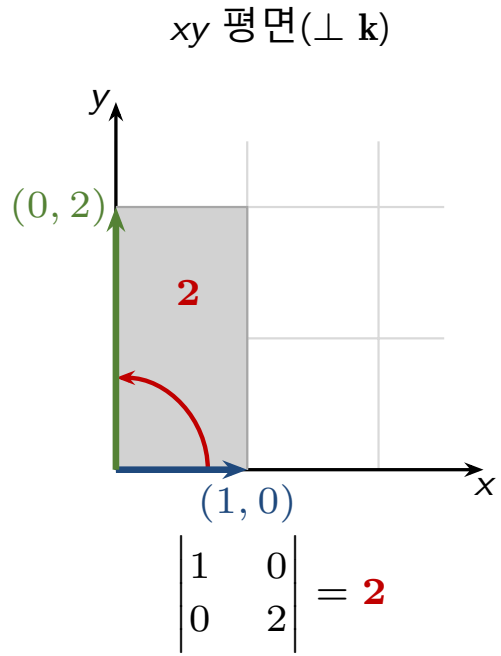
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

외적의 성분 — 세 좌표평면으로의 정사영 (4/4)

$\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$ 의 평행사변형을 세 좌표평면 위로 수직으로 내린다(정사영).

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2,\ -1,\ \mathbf{2})$$





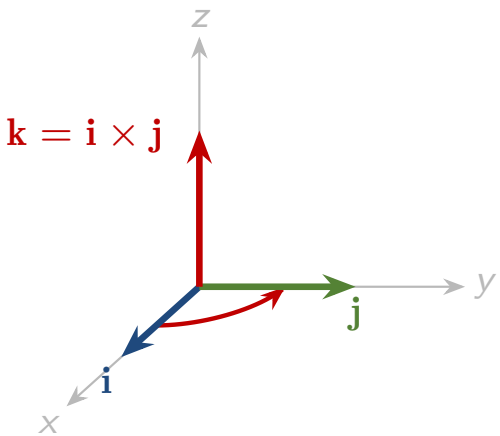
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{2}$$

표준단위벡터의 외적 — 오른손 법칙

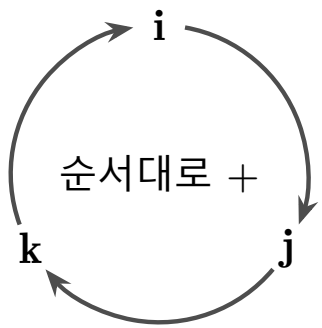
성분 공식에 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 를 넣으면 정의 (2/3) 의 오른손 법칙과 같은 방향이 나온다.

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1,\ \ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0,\ \ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = (1 \cdot 0 - 0 \cdot 0,\ \ 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0,\ \ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (0, 0, -1) = -\mathbf{k}$$



빨간 호 = 네 손가락 ($\mathbf{i} \to \mathbf{j}$)



$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

[오른손 법칙] 네 손가락을 $\mathbf{i} \to \mathbf{j}$ 로 감으면 엄지가 $\mathbf{k}$, 거꾸로($\mathbf{j} \to \mathbf{i}$)는 아래 $-\mathbf{k}$.
$\mathbf{j} \to \mathbf{k}$ 는 엄지 $\mathbf{i}$, $\mathbf{k} \to \mathbf{i}$ 는 엄지 $\mathbf{j}$. 같은 것끼리는 넓이 0 이라 $\mathbf{0}$.

외적의 성질 — 정리 4-6 (1/4)

CONCEPT 정리 4-6

$\mathbb{R}^3$ 의 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 와 임의의 스칼라 k 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

(2) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

(3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(4) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

(5) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(6) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

[주의] 교환법칙은 없다: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ 이지만 $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$.
결합법칙도 없다: $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ 이지만 $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$.

외적의 성질 — 두 row 교환과 k 배 (2/4)

셋째 성분 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ 은 row 1 $=\mathbf{u}$, row 2 $=\mathbf{v}$ 인 2차 행렬식이다.

▶ **(1) 두 row 교환 — 정리 3-3 (두 row 를 바꾸면 -1 배)**

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{u})_3 = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = -(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_3$$

▶ **(4) 한 row 의 k 배 — 정리 3-2 (한 row 를 k 배 하면 k 배)**

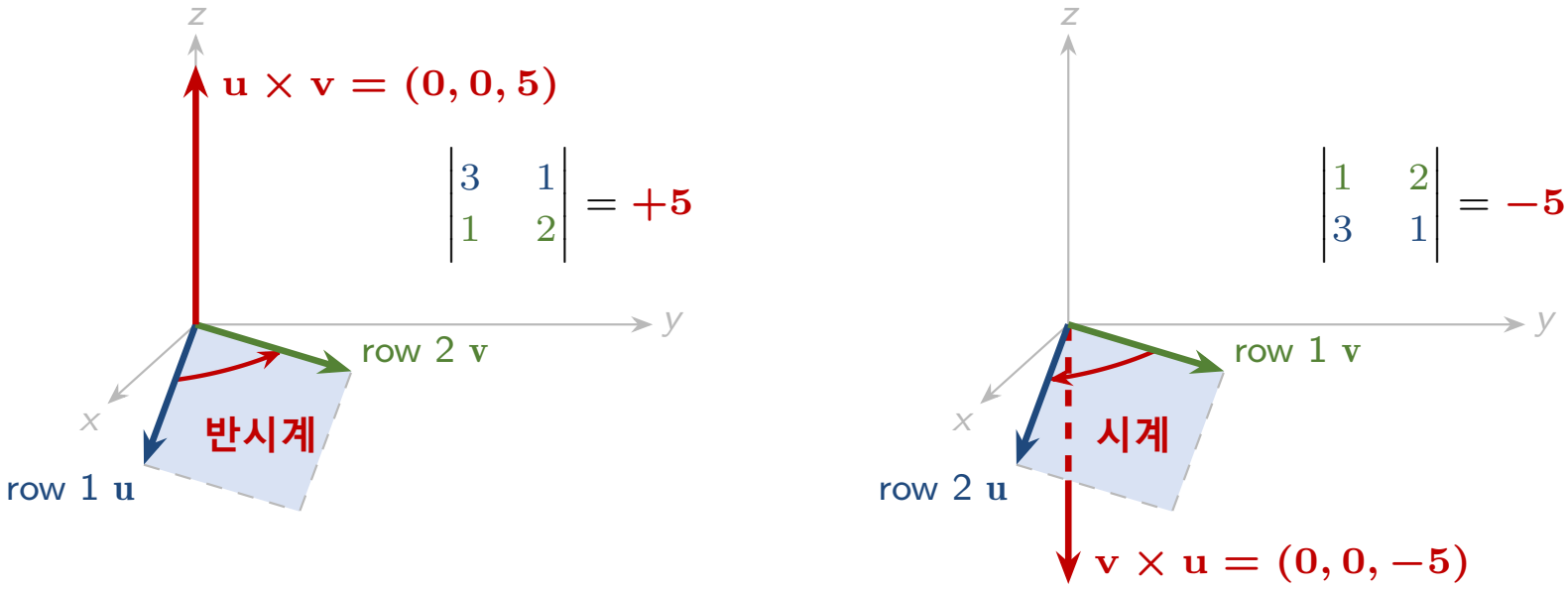
$$\big((k\mathbf{u})\times\mathbf{v}\big)_3 = \begin{vmatrix} ku_1 & ku_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = k\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_3$$

$\mathbf{u}\times(k\mathbf{v})$ 는 row 2 의 k 배. 첫째 · 둘째 성분도 같다(둘째의 $-$ 는 양변에 같이 붙는다).

[3장] 두 row 를 바꾸면 2차 $\det$ 는 **부호**가, 외적은 **방향**이 반대. 크기(넓이)는 그대로. 두 현상은 같은 것이다.

외적의 성질 — 두 row 교환은 외적을 뒤집는다 (3/4)

정리 4-6 (1) 을 $\mathbf{u} = (3, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$ 으로. 바닥은 3장 정리 3-3 (3/3) 의 두 칸.

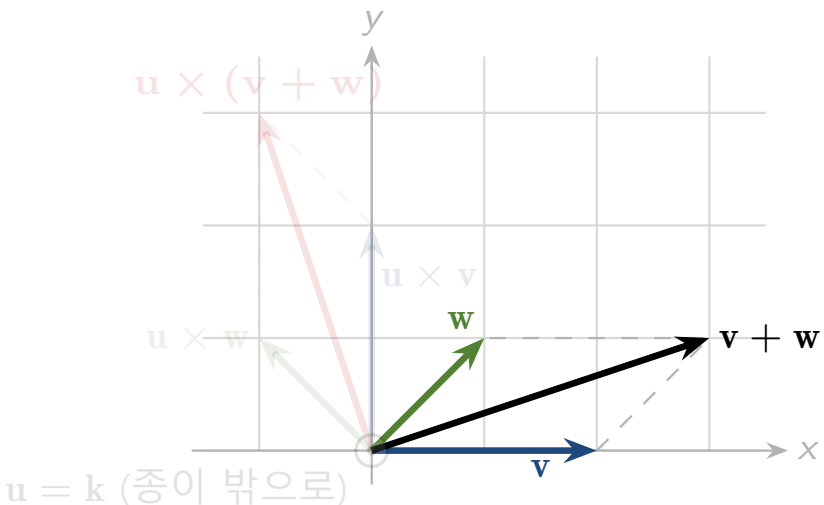


빨간 호 = row 1 에서 row 2 로 감은 오른손 네 손가락, 엄지 = 외적

[3장] xy 평면에서는 2차 $\det$ = 외적의 z 성분(왜 외적인가 쪽).
$\det$ 의 **부호**가 바뀌는 것 = 외적이 **뒤집히는** 것. 크기(넓이 5)는 그대로.

외적의 성질 — (2) 분배법칙을 그림으로 (1/5)

$\mathbf{u}$ 가 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 의 평면에 수직이면 $\mathbf{u}\times$ 는 그 평면 안에서 반시계 $90°$ 회전($\times\|\mathbf{u}\|$):
$\mathbf{k}\times(x,y,0)=(-y,x,0)$.



▶ $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{w}$

$\mathbf{v}=(2,0,0)$, $\mathbf{w}=(1,1,0)$, 합 $(3,1,0)$

좌변 : 더한 뒤 돌린다 $\to(-1,3,0)$

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(0,2,0)$: $\mathbf{v}$ 를 돌린다

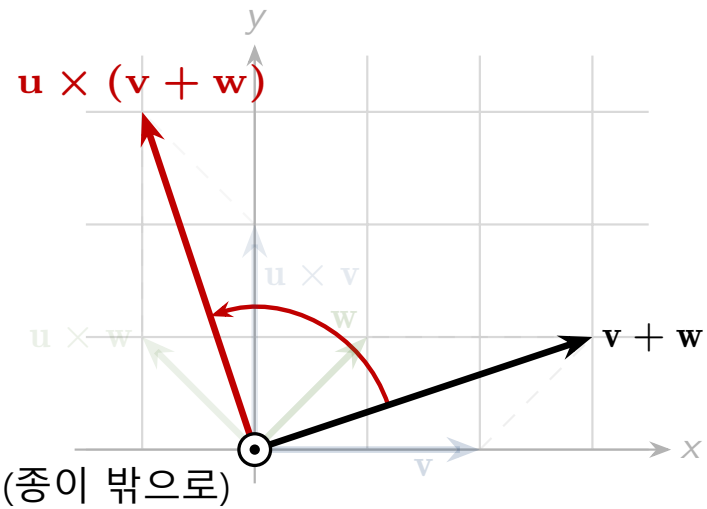
$\mathbf{u}\times\mathbf{w}=(-1,1,0)$: $\mathbf{w}$ 를 돌린다

우변 : 따로 돌려 더하면 $(-1,3,0)=$ 좌변

[직관] 돌려서 더하나, 더해서 돌리나 같다(평행사변형이 통째로 돈다).
그림은 $\mathbf{u}$ 가 평면에 수직인 경우. 어떤 $\mathbf{u}$ 든 성립하는 것은 정리 3-6 으로 보인다.

외적의 성질 — (2) 분배법칙을 그림으로 (2/5)

$\mathbf{u}$ 가 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 의 평면에 수직이면 $\mathbf{u}\times$ 는 그 평면 안에서 반시계 $90°$ 회전($\times\|\mathbf{u}\|$):
$\mathbf{k}\times(x,y,0)=(-y,x,0)$.



▶ $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

$\mathbf{v}=(2,0,0)$, $\mathbf{w}=(1,1,0)$, 합 $(3,1,0)$

좌변 : 더한 뒤 돌린다 $\rightarrow(-1,3,0)$

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(0,2,0)$: $\mathbf{v}$ 를 돌린다

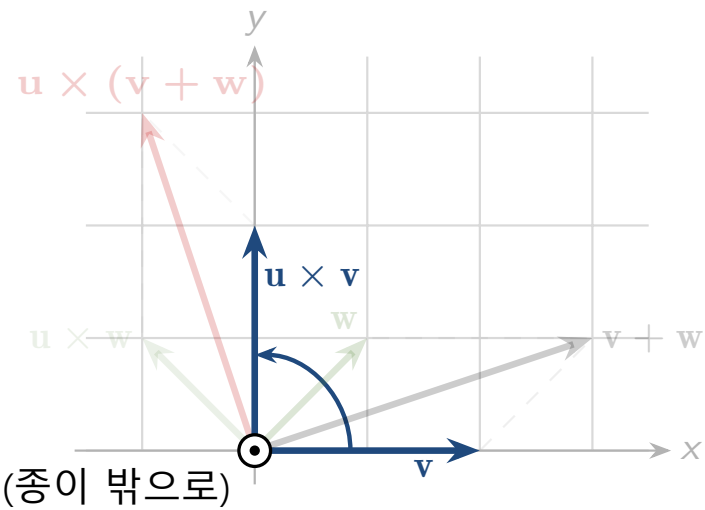
$\mathbf{u}\times\mathbf{w}=(-1,1,0)$: $\mathbf{w}$ 를 돌린다

우변 : 따로 돌려 더하면 $(-1,3,0)=$ 좌변

[직관] 돌려서 더하나, 더해서 돌리나 같다(평행사변형이 통째로 돈다).
그림은 $\mathbf{u}$ 가 평면에 수직인 경우. 어떤 $\mathbf{u}$ 든 성립하는 것은 정리 3-6 으로 보인다.

외적의 성질 — (2) 분배법칙을 그림으로 (3/5)

$\mathbf{u}$ 가 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 의 평면에 수직이면 $\mathbf{u}\times$ 는 그 평면 안에서 반시계 $90°$ 회전($\times\|\mathbf{u}\|$):
$\mathbf{k}\times(x,y,0)=(-y,x,0)$.



$\mathbf{u}=\mathbf{k}$ (종이 밖으로)

▶ $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

$\mathbf{v}=(2,0,0)$, $\mathbf{w}=(1,1,0)$, 합 $(3,1,0)$

좌변 : 더한 뒤 돌린다 $\to(-1,3,0)$

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(0,2,0)$: $\mathbf{v}$ 를 돌린다

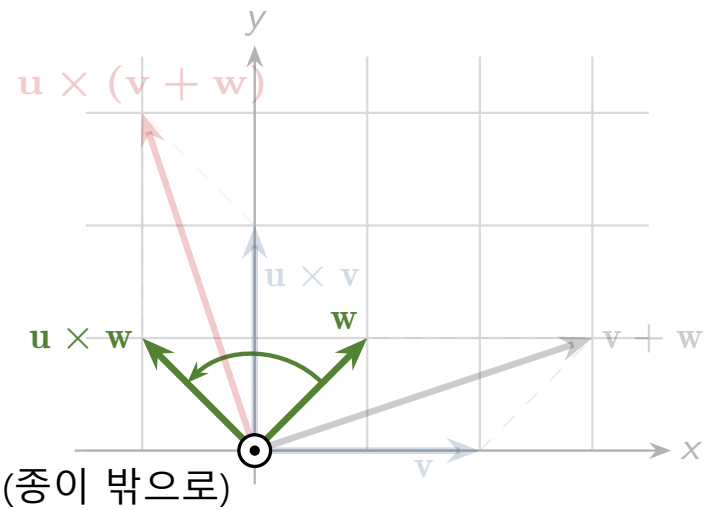
$\mathbf{u}\times\mathbf{w}=(-1,1,0)$: $\mathbf{w}$ 를 돌린다

우변 : 따로 돌려 더하면 $(-1,3,0)$ = 좌변

[직관] 돌려서 더하나, 더해서 돌리나 같다(평행사변형이 통째로 돈다).
그림은 $\mathbf{u}$ 가 평면에 수직인 경우. 어떤 $\mathbf{u}$ 든 성립하는 것은 정리 3-6 으로 보인다.

외적의 성질 — (2) 분배법칙을 그림으로 (4/5)

$\mathbf{u}$ 가 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 의 평면에 수직이면 $\mathbf{u}\times$ 는 그 평면 안에서 반시계 $90°$ 회전($\times\|\mathbf{u}\|$):
$\mathbf{k}\times(x,y,0)=(-y,x,0)$.



$\mathbf{u}=\mathbf{k}$ (종이 밖으로)

▶ $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

$\mathbf{v}=(2,0,0)$, $\mathbf{w}=(1,1,0)$, 합 $(3,1,0)$

좌변 : 더한 뒤 돌린다 $\to(-1,3,0)$

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(0,2,0)$: $\mathbf{v}$ 를 돌린다

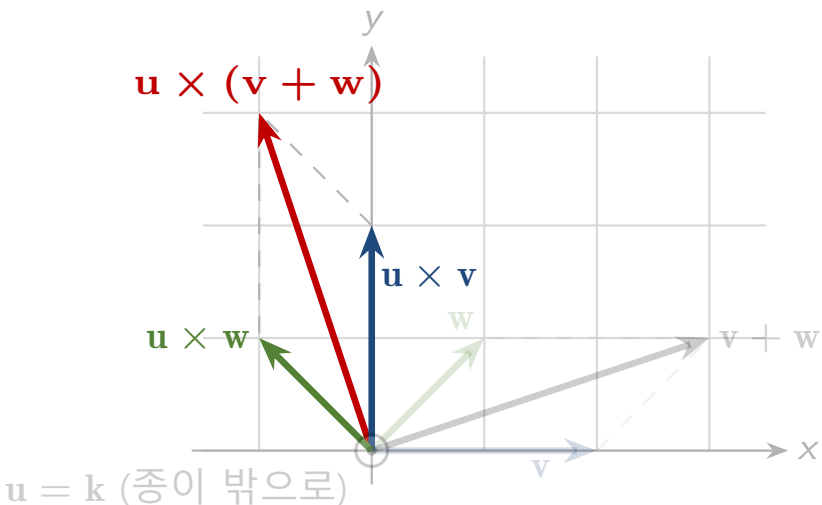
$\mathbf{u}\times\mathbf{w}=(-1,1,0)$: $\mathbf{w}$ 를 돌린다

우변 : 따로 돌려 더하면 $(-1,3,0)$ = 좌변

[직관] 돌려서 더하나, 더해서 돌리나 같다(평행사변형이 통째로 돈다).
그림은 $\mathbf{u}$ 가 평면에 수직인 경우. 어떤 $\mathbf{u}$ 든 성립하는 것은 정리 3-6 으로 보인다.

외적의 성질 — (2) 분배법칙을 그림으로 (5/5)

$\mathbf{u}$ 가 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 의 평면에 수직이면 $\mathbf{u}\times$ 는 그 평면 안에서 반시계 $90°$ 회전($\times\|\mathbf{u}\|$):
$\mathbf{k}\times(x,y,0)=(-y,x,0)$.



▶ $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

$\mathbf{v}=(2,0,0)$, $\mathbf{w}=(1,1,0)$, 합 $(3,1,0)$

좌변 : 더한 뒤 돌린다 $\to(-1,3,0)$

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(0,2,0)$: $\mathbf{v}$ 를 돌린다

$\mathbf{u}\times\mathbf{w}=(-1,1,0)$: $\mathbf{w}$ 를 돌린다

우변 : 따로 돌려 더하면 $(-1,3,0)$ = 좌변

[직관] 돌려서 더하나, 더해서 돌리나 같다(평행사변형이 통째로 돈다).
그림은 $\mathbf{u}$ 가 평면에 수직인 경우. 어떤 $\mathbf{u}$ 든 성립하는 것은 정리 3-6 으로 보인다.

외적의 성질 — 합, 0, 같은 벡터 (4/4)

▶ **(2)(3) 어떤 $\mathbf{u}$ 든 — 한 row 가 두 벡터의 합이면 행렬식도 둘로 나뉜다 (정리 3-6)**

$$\big(\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})\big)_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1+w_1 & v_2+w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

(3) 은 row 1 이 합인 경우로 같은 방법이다.

▶ **(5) row 가 0_2 — 정리 3-2 에서 $k=0$, (6) 같은 두 row — 정리 3-4 ($\det=0$)**

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = 0$$

[3장] (6) 같은 두 row 의 $\det=0$ 처럼 자기 자신과는 평행사변형이 납작해져 넓이 0. 외적이 3장의 행렬식과 닮은 것은 **넓이**(벡터 둘)다. 부피(벡터 셋)는 뒤의 스칼라 삼중적.

예제 4-13 분배법칙 확인 (1/2)

다음 세 벡터에 대하여 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\times\mathbf{w})+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ 가 성립함을 확인하라.

$$\mathbf{u}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k},\qquad \mathbf{v}=-\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k},\qquad \mathbf{w}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

▶ **좌변 — 먼저 더하고, 그다음 $\mathbf{w}=(2,2,-1)$ 과 외적**

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(3-1,\ \ -1+4,\ \ 1-2)=(2,3,-1)$$

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\left(\begin{vmatrix}3&-1\\2&-1\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}2&-1\\2&-1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2&3\\2&2\end{vmatrix}\right)$$

$$=\big(-3+2,\ \ -(-2+2),\ \ 4-6\big)=\boxed{(-1,0,-2)}$$

[이어서] 우변 $(\mathbf{u}\times\mathbf{w})+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ 를 계산해 좌변과 비교한다.

예제 4-13 분배법칙 확인 (2/2)

SOLUTION 4-13

▶ **우변 — $\mathbf{u}=(3,-1,1)$, $\mathbf{v}=(-1,4,-2)$ 를 각각 $\mathbf{w}=(2,2,-1)$ 과 외적**

$$\mathbf{u}\times\mathbf{w}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right)$$
$$=\big(1-2,\ \ -(-3-2),\ \ 6+2\big)=(-1,5,8)$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\left(\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right)$$
$$=\big(-4+4,\ \ -(1+4),\ \ -2-8\big)=(0,-5,-10)$$

▶ **우변 — 두 외적을 더한다**

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{w})+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(-1+0,\ \ 5-5,\ \ 8-10)=\boxed{(-1,0,-2)}$$

[확인] 좌변 $=$ 우변 $=(-1,0,-2)$. 정리 4-6 (3) 이 성립한다.

내적과 외적 — 정리 4-7 (1/4)

CONCEPT 정리 4-7

$\mathbb{R}^3$ 의 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

(1) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

(2) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

(3) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$

(4) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

(5) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$

[읽는 법] (1)(2) 외적($\neq \mathbf{0}$)은 두 벡터에 수직 (정의 (2/3) 의 방향 $\hat{\mathbf{n}}$).
(3) 외적의 크기 (정의 (1/3) 의 넓이).
(4)(5) 외적을 두 번 하면 괄호 안 두 벡터의 평면으로 돌아온다 (그림으로 먼저).

내적과 외적 — (1)(2) 두 벡터에 수직 (2/4)

▶ **(1) row 가 $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ 인 3차 행렬식 $= \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ 에서 $\mathbf{w} = \mathbf{u}$**

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

두 row 가 같다 (정리 3-4)

▶ **(2) 같은 방법 — row 1 과 row 3 이 같다**

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \end{vmatrix} = 0$$

[직관] 두 내적이 $0 \Rightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ $(\neq \mathbf{0})$ 는 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 에 모두 수직 (정리 4-4).
평행육면체로 보면 셋째 모서리가 밑면 안에 누워 부피 0.

내적과 외적 — (3) 좌변 전개 (3/4)

$$\boxed{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}$$

$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$ 은 세 성분의 제곱의 합이다. 성분마다 $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 로 편다.

$$(u_2v_3 - u_3v_2)^2 = u_2^2v_3^2 + u_3^2v_2^2 - 2\,u_2u_3v_2v_3$$
$$(u_3v_1 - u_1v_3)^2 = u_3^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 - 2\,u_1u_3v_1v_3$$
$$(u_1v_2 - u_2v_1)^2 = u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2\,u_1u_2v_1v_2$$

▶ **세 줄을 더한다 — 두 묶음에 이름을 붙인다**

$S_1 = u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2$ (첨자가 다른 제곱 곱 여섯 개)

$S_2 = u_1u_2v_1v_2 + u_1u_3v_1v_3 + u_2u_3v_2v_3$ (-2 뒤의 세 곱)

$$\boxed{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = S_1 - 2S_2}$$

내적과 외적 — (3) 우변 전개 (4/4)

$$\boxed{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}$$

첨자가 같은 곱의 합을 $S_3 = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$ 이라 하자.

$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2) = S_3 + S_1$$

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 = S_3 + 2S_2$$

윗줄: 곱 아홉 개 = 같은 첨자 셋(S_3) + 다른 첨자 여섯(S_1).
아랫줄: 제곱 셋(S_3) + 두 배 곱 셋($2S_2$)

⇒ 두 식을 빼면 S_3 이 지워진다.

$$\boxed{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = (S_3+S_1) - (S_3+2S_2) = S_1 - 2S_2 = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2}$$

▶ **확인 — 외적의 성분 쪽의 $\mathbf{u}=(1,0,1)$, $\mathbf{v}=(0,2,1)$**

$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = 2\cdot 5 - 1^2 = 9 = 3^2 = \|(-2,-1,2)\|^2$$

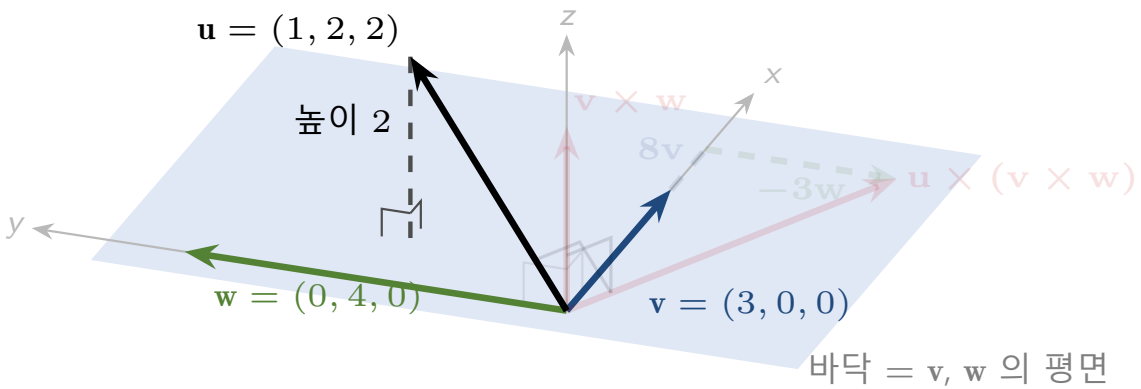
외적을 두 번 — 평면으로의 회귀 (1/6)

$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0, 0, 12) \to$ 바닥에 수직

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (24, -12, 0) \to \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 에 수직이니 다시 바닥 위

바닥 위라서 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 로 나뉜다: $(24, -12, 0) = 8\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$

계수 $8 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, $3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 는 내적(수): $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$



[직관] 바닥에 수직인 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 와 다시 외적하면, 그것에 수직이라 바닥으로 돌아온다.
(5) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ 도 같은 그림: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 의 평면으로 돌아온다.

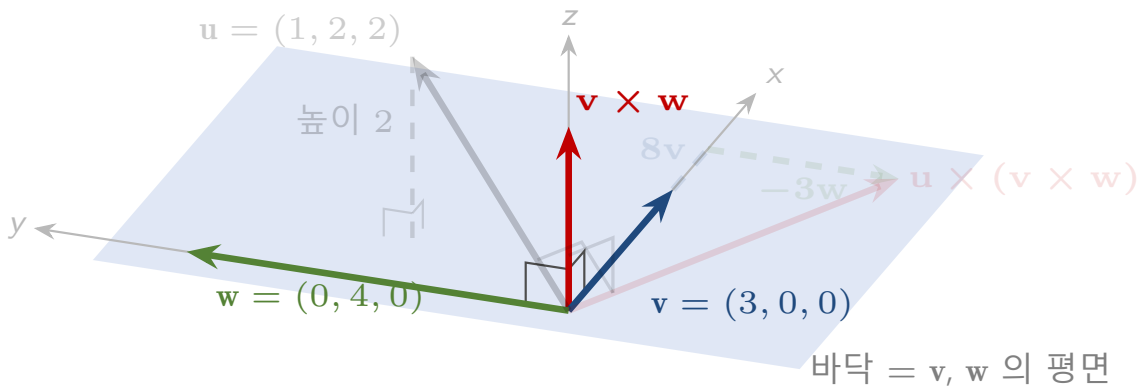
외적을 두 번 — 평면으로의 회귀 (2/6)

$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0, 0, 12) \rightarrow$ **바닥에 수직**

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (24, -12, 0) \rightarrow \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 에 수직이니 다시 바닥 위

바닥 위라서 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 로 나뉜다: $(24, -12, 0) = 8\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$

계수 $8 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, $3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 는 내적(수): $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$



[직관] 바닥에 수직인 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 와 다시 외적하면, 그것에 수직이라 바닥으로 돌아온다.
(5) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ 도 같은 그림: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 의 평면으로 돌아온다.

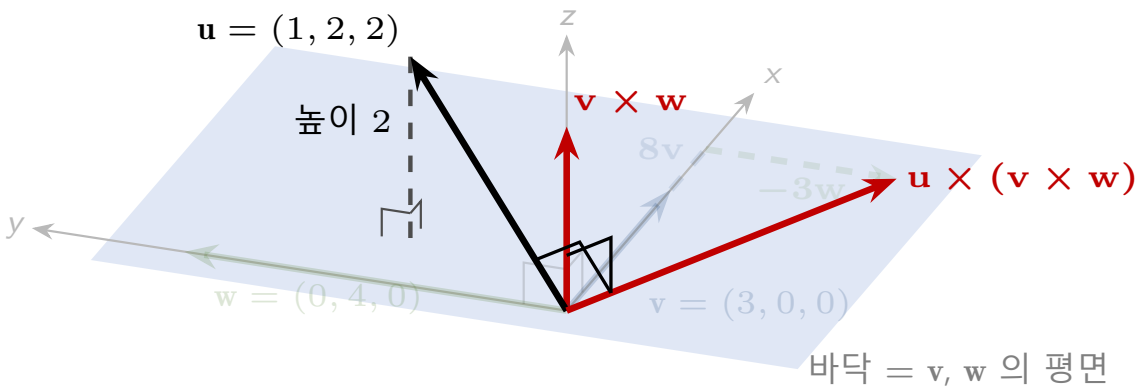
외적을 두 번 — 평면으로의 회귀 (3/6)

$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0, 0, 12) \to$ 바닥에 수직

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (24, -12, 0) \to \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 에 수직이니 다시 바닥 위

바닥 위라서 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 로 나뉜다: $(24, -12, 0) = 8\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$

계수 $8 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, $3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 는 내적(수): $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$



[직관] 바닥에 수직인 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 와 다시 외적하면, 그것에 수직이라 바닥으로 돌아온다.
(5) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ 도 같은 그림: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 의 평면으로 돌아온다.

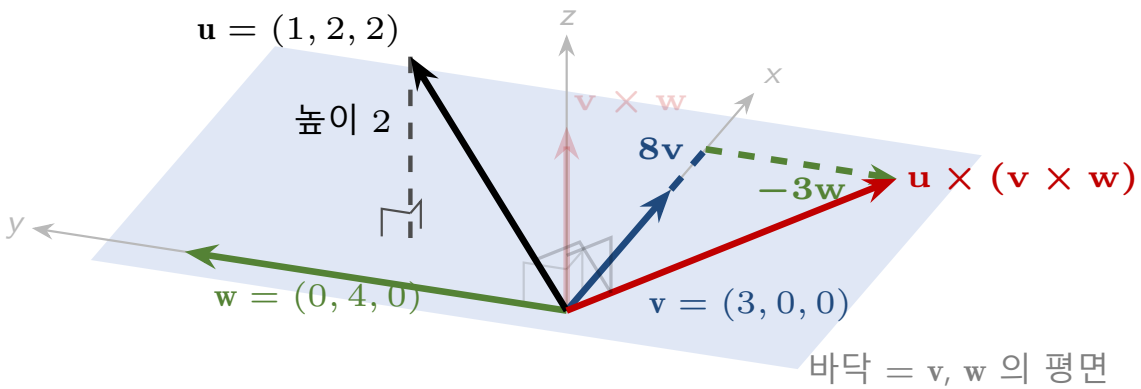
외적을 두 번 — 평면으로의 회귀 (4/6)

$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0, 0, 12) \rightarrow$ 바닥에 수직

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (24, -12, 0) \rightarrow \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 에 수직이니 다시 바닥 위

바닥 위라서 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 로 나뉜다: $(24, -12, 0) = 8\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$

계수 $8 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, $3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 는 내적(수): $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$



[직관] 바닥에 수직인 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 와 다시 외적하면, 그것에 수직이라 바닥으로 돌아온다.
(5) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ 도 같은 그림: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 의 평면으로 돌아온다.

외적을 두 번 — 수로 확인 (5/6)

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ 를 구한다. 바닥(xy 평면)의 $\mathbf{v} = (3, 0, 0)$ (x축), $\mathbf{w} = (0, 4, 0)$ (y축) 과 비스듬히 선 $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$.

▶ 정의대로 두 번

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 4,\quad 0 \cdot 0 - 3 \cdot 0,\quad 3 \cdot 4 - 0 \cdot 0) = \underbrace{(0, 0, 12)}_{\text{바닥에 수직}}$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (2 \cdot 12 - 2 \cdot 0,\quad 2 \cdot 0 - 1 \cdot 12,\quad 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = \underbrace{(24, -12, 0)}_{\text{다시 바닥 위}}$$

▶ 정리 4-7 (4) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ 로

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 8, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 3$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = 8\,\mathbf{v} - 3\,\mathbf{w} = (24, 0, 0) - (0, 12, 0) = (24, -12, 0)$$

[확인] 결과 $(24, -12, 0) = 8\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$: 그림에서 바닥으로 돌아온 그 화살표다.

외적을 두 번 — (4)(5) 성분으로 증명 (6/6)

▶ **(4) 첫째 성분만 — $\mathbf{p} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 로 두고 정의대로 (둘째 · 셋째도 같은 방법)**

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]_1 &= u_2 p_3 - u_3 p_2 = u_2(v_1 w_2 - v_2 w_1) - u_3(v_3 w_1 - v_1 w_3) \\
&= u_2 v_1 w_2 - u_2 v_2 w_1 - u_3 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_3 \\
&= v_1(u_2 w_2 + u_3 w_3) - w_1(u_2 v_2 + u_3 v_3) \\
&= v_1(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - u_1 w_1) - w_1(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - u_1 v_1) \\
&= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\, v_1 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, w_1 \qquad (-v_1 u_1 w_1 + w_1 u_1 v_1 = 0)
\end{aligned}
$$

▶ **(5) — (4) 에서 순서만 바꾼다**

$$
(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \overset{\text{(i)}}{=} -\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \overset{\text{(ii)}}{=} -\big[(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}\big] \overset{\text{(iii)}}{=} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}
$$

(i) 정리 4-6 (1) 순서 바꾸기 (ii) 위의 (4) 에 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 대신 $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ (iii) 내적의 교환(정리 4-5 (2))

[직관] (4) 의 결과는 $\mathbf{v}$ 와 $\mathbf{w}$ 를 몇 배씩 더한 것 $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 가 놓인 평면 안에 있다.

예제 4-14 외적을 두 번 하는 공식 확인 (1/2)

다음 세 벡터에 대하여 $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$ 가 성립함을 확인하라.

$$\mathbf{u}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k},\qquad \mathbf{v}=-\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k},\qquad \mathbf{w}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

▶ **좌변 — $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=(0,-5,-10)$ (예제 4-13) 에 $\mathbf{u}=(3,-1,1)$ 을 외적**

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -5 & -10\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -10\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & -5\end{vmatrix}\right)$$

$$=\big(10+5,\ \ -(-30-0),\ \ -15-0\big)=\boxed{(15,30,-15)}$$

▶ **우변 — 먼저 내적 두 개**

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=3\cdot2+(-1)\cdot2+1\cdot(-1)=6-2-1=3$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=3\cdot(-1)+(-1)\cdot4+1\cdot(-2)=-3-4-2=-9$$

예제 4-14 외적을 두 번 하는 공식 확인 (2/2)

SOLUTION 4-14

▶ 우변 — (1/2) 에서 구한 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=3$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-9$ 를 넣는다

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}=3\,\mathbf{v}+9\,\mathbf{w}=(-3,12,-6)+(18,18,-9)=\boxed{(15,30,-15)}$$

$$\text{좌변}=\text{우변}=(15,30,-15)$$

▶ 평면으로의 회귀 확인 — 결과는 $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ 에 수직

$$(15,30,-15)\cdot(0,-5,-10)=0-150+150=0$$

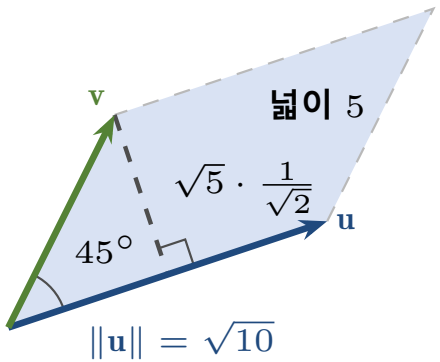
[확인] 결과 $=3\mathbf{v}+9\mathbf{w}$ 는 $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ 에 수직, 곧 $\mathbf{v}$ 와 $\mathbf{w}$ 가 놓인 평면 안에 있다.

외적의 크기 — 성분 공식과 정의가 같은 이유

▶ **성분 공식에서도 정의 (1/3) 의 크기 — 정리 4-7 (3) 에 내적의 정의 (4.1) 를 넣는다**

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cos^2\theta \qquad (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1-\cos^2\theta) = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 \le \theta \le \pi$ 에서 $\sin\theta \ge 0$ 이므로 양변의 제곱근을 취하면



$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{\text{밑변}}\ \underbrace{\|\mathbf{v}\|\sin\theta}_{\text{높이}}$$

왼쪽 그림 : 정의 (1/3) 의 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 를 위에서 본 것

넓이 $\sqrt{10}\cdot\left(\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5$, 삼각형은 그 반

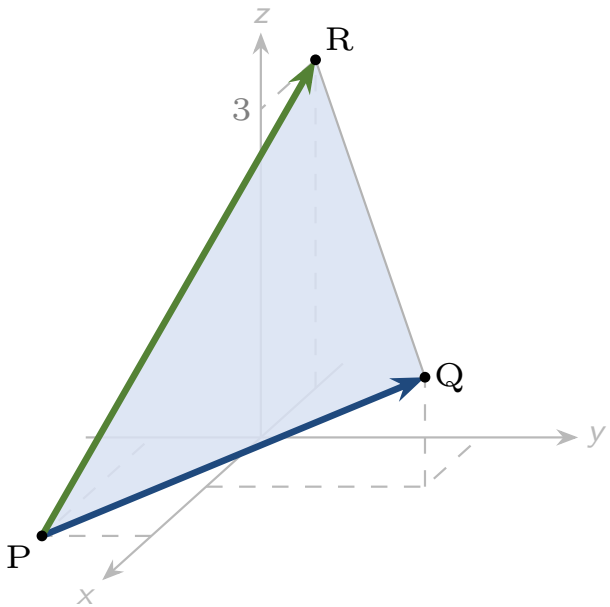
3.1절 $\triangle OPQ = \frac{1}{2}r_1 r_2\sin(\theta_2-\theta_1)$ 과 같은 식

[한 직선 위] $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$ 또는 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 또는 $\sin\theta = 0 \iff$ 한 직선 위

예제 4-15 삼각형의 넓이 (1/2)

다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR 의 넓이 S 를 구하라.

$$\mathrm{P}(2,-1,0), \qquad \mathrm{Q}(1,2,1), \qquad \mathrm{R}(-1,0,3)$$



▶ P 에서 나가는 두 변을 벡터로

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (1-2,\ 2+1,\ 1-0) = (-1,3,1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (-1-2,\ 0+1,\ 3-0) = (-3,1,3)$$

▶ 삼각형 = 평행사변형의 반

$$S = \tfrac{1}{2}\,\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}\|$$

[왜 외적] 두 변 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ 은 3차원 벡터 둘: row 로 쌓으면 2×3 이라 행렬식이 없다.
그래서 넓이는 외적의 크기로 구한다: $S = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}\|$.

예제 4-15 삼각형의 넓이 (2/2)

SOLUTION 4-15

▶ 외적

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right)$$
$$= \big(9-1, \quad -(-3+3), \quad -1+9\big) = (8,0,8)$$

▶ 크기와 넓이

$$\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \sqrt{8^2+0^2+8^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\boxed{S = \tfrac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \approx 5.66}$$

[검산] 정리 4-7 (3): $\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = 11$, $\|\overrightarrow{PR}\|^2 = 19$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 3+3+3 = 9$

$$\Rightarrow \quad 11 \cdot 19 - 9^2 = 209 - 81 = 128 = (8\sqrt{2})^2$$

스칼라 삼중적 (1/2)

3장의 3차 행렬식 = 세 row 의 평행육면체의 **부호 있는 부피**. 이것을 벡터로 쓴다.

CONCEPT 정의

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ 의 **스칼라 삼중적**(scalar triple product)은 수 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ 이다.

▶ **3차 행렬식이다 — row 1 에 대한 전개 (3.5) 와 같다**

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

▶ **예 — 평면으로의 회귀의 $\mathbf{v} = (3,0,0)$, $\mathbf{w} = (0,4,0)$ 에 새 $\mathbf{u} = (1,2,3)$**

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 12 = 36$$

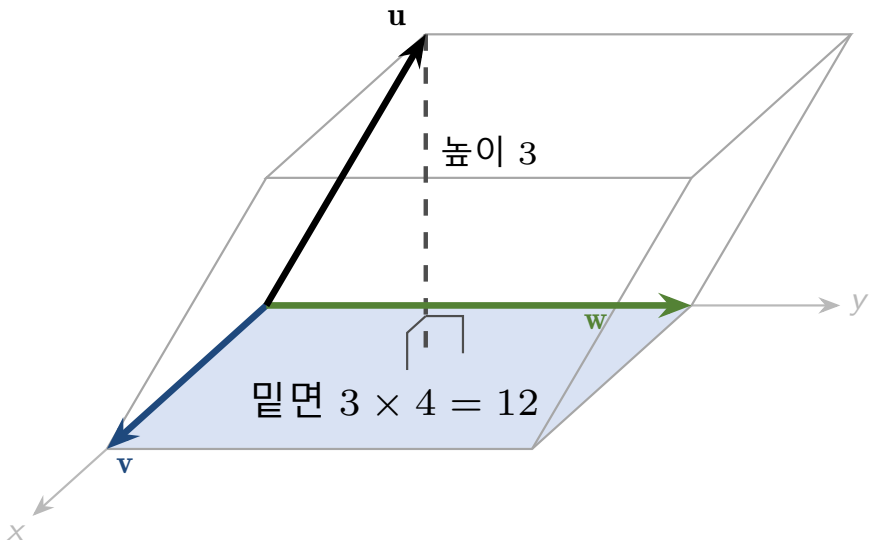
스칼라 삼중적 — 부피 (2/2)

평면으로의 회귀와 같은 밑면 $\mathbf{v} = (3, 0, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 4, 0)$ 에 옆 모서리 $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$.

▶ **세 벡터 = 세 row**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \mathbf{u} \\ \leftarrow \mathbf{v} \\ \leftarrow \mathbf{w} \end{matrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 36$$



$$\underbrace{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}_{\text{밑면 넓이}} \times \underbrace{3}_{\text{높이}} = 12 \times 3 = 36 = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (1, 2, 3) \cdot (0, 0, 12) = \det \mathbf{A}$$

[3장] 부호: $\mathbf{u}$ 가 $\mathbf{v} \to \mathbf{w}$ 로 감은 오른손 엄지 쪽(그림의 위)이면 $+$, 반대쪽이면 $-$.
3장 규칙(row 1 → row 2 엄지 쪽에 row 3)을 $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ 로 읽은 것(뒤의 정리 4-8 (3/3)).

평행육면체의 부피 — 정리 4-8 (1/3)

CONCEPT 정리 4-8

$\mathbb{R}^3$ 의 벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ 에 의해

만들어지는 평행육면체의 부피는

이 세 벡터의 스칼라 삼중적의 절댓값 $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ 와 같다.

▶ 왜 그런가 — 부피 = 밑면 넓이 × 높이

밑면 = $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 의 평행사변형. 높이 = 밑면에 수직인 방향 위로 $\mathbf{w}$ 의 정사영 길이 (4.2절).
그 방향은 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 를 정규화한 단위벡터 $\hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})/\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ (정리 4-7 (1)(2)).

$$V = \underbrace{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}_{\text{밑면 넓이}} \cdot \underbrace{|\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}|}_{\text{높이}} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \cdot \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ 이면 밑면이 납작해 부피 0, 스칼라 삼중적도 0.

평행육면체의 부피 — 두 모양은 같은 값 (2/3)

정리는 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$, 스칼라 삼중적의 정의는 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. 둘 다 같은 행렬식이다.

▶ **row 교환 두 번 — 3장 정리 3-3 (2/3) : 두 번 바꾸면 $(-1)^2=1$ 배**

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\begin{vmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{w}\\ \mathbf{v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{vmatrix}=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

첫 등호: 내적의 교환(정리 4-5 (2)). 둘째 등호: row 가 $\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}$ 인 3차 행렬식 $=\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$.
세로로 쌓은 행렬식 = row 1, 2, 3 이 그 벡터의 성분인 3차 행렬식.

[3장] 정리 4-8 (1/3) 의 부피 $=|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|$ 와 이 쪽의 같은 행렬식을 합치면
외적의 성분 공식이 출발한 3.1절 "3×3 → 평행육면체 부피 $=|\det|$" 가 증명된다.

평행육면체의 부피 — 순서와 부호 (3/3)

내적 하나, 외적 하나로 세 벡터를 묶으면 늘 같은 값일까?
절댓값(부피)은 같고, 부호는 순서가 정한다.

▶ **순환 — $\mathbf{u} \to \mathbf{v} \to \mathbf{w} \to \mathbf{u}$ 로 돌리면 같은 값**

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

순환의 하나: $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (두 모양은 같은 값).
나머지 $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$ 도 row 교환 두 번으로 같다.

$$(1,2,3) \cdot (0,0,12) = (3,0,0) \cdot (12,0,-4) = (0,4,0) \cdot (0,9,-6) = 36$$

▶ **맞바꿈 — 두 벡터를 바꾸면 -1 배 (row 교환 한 번, 정리 3-3)**

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) : \qquad (1,2,3) \cdot (0,0,-12) = -36$$

[주의] $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ 는 뜻이 없다($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 는 수라 외적을 못 한다).
$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ 는 외적을 두 번 한 벡터다(정리 4-7 (5)). 부피가 아니다.

예제 4-16 평행육면체의 부피 (1/2)

다음 세 벡터로 만들어지는 평행육면체의 부피 V 를 구하라.

$$\mathbf{u} = (-3, 2, -2), \qquad \mathbf{v} = (-1, 1, 3), \qquad \mathbf{w} = (2, -4, 3)$$

▶ **정리 4-8 의 모양대로 — 먼저 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$**

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \big(2 \cdot 3 - (-2) \cdot 1, \quad -[(-3) \cdot 3 - (-2)(-1)], \quad (-3) \cdot 1 - 2 \cdot (-1)\big) \\ &= (6 + 2, \quad -(-9 - 2), \quad -3 + 2) = (8, 11, -1)\end{aligned}$$

▶ **그다음 $\mathbf{w}$ 와 내적**

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 8 \cdot 2 + 11 \cdot (-4) + (-1) \cdot 3 = 16 - 44 - 3 = -31$$

$$\boxed{V = |-31| = 31}$$

예제 4-16 평행육면체의 부피 (2/2)

SOLUTION 4-16

▶ **세 벡터를 row 로 쌓은 3차 행렬식 — row 1 에 대한 여인자 전개 (3.5)**

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -3(3+12) - 2(-3-6) - 2(4-2) = -45 + 18 - 4 = \boxed{-31}$$

(1/2) 의 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = -31$ 과 같다 (정리 4-8 (2/3) : 둘 다 같은 행렬식).

▶ **부호 $-$ 의 뜻 — 3장의 3차 부호 규칙**

3.2절 (정리 3-3 의 부호): row 1 $\to$ row 2 로 감은 오른손 엄지 쪽에 row 3 이 있으면 $+$.
여기서는 $\mathbf{w}$ 가 $\mathbf{u}\to\mathbf{v}$ 로 감은 엄지$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$의 반대쪽이라 $-$. 부피는 부호를 버린 31.

[요약] 스칼라 삼중적 $=$ 3차 행렬식 $=$ 부호 있는 부피, 부피 $=|$스칼라 삼중적$|$.

Chapter 4. n차원 실벡터

4.1 벡터의 정의

4.2 내적

4.3 외적

4.4 n차원 벡터

4.5 벡터의 활용

n차원 벡터

CONCEPT 정의

n개 실수의 순서쌍 $(u_1, \ldots, u_n)$ 을 n**차원 벡터**(n-dimensional vector)라 한다.

$$\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) \qquad \text{또는} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (n \times 1 \text{ 행렬})$$

u_i 를 $\mathbf{u}$ 의 i번째 **성분**이라 하고, n차원 벡터 전체의 집합을 $\mathbb{R}^n$ 으로 쓴다.

▶ 어디서 나오나 — 미지수가 n개인 연립방정식 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 의 해

해 $\mathbf{x}$ 는 $n \times 1$ 행렬, 곧 $\mathbb{R}^n$ 의 벡터다. 1장에서 이미 썼다.
예제 1-9 의 해 (1.15) $\mathbf{x} = t(-1, 1, -1, 1)$ 에서 $t = 1$ 이면 $\mathbf{x} = (-1,\ 1,\ -1,\ 1) \in \mathbb{R}^4$.

[직관] $n = 2, 3$ 이면 4.1절의 평면벡터·공간벡터다.
$n \geq 4$ 는 화살표를 그릴 축이 없어 **성분**으로만 다룬다.

$\mathbb{R}^n$ 의 합과 스칼라 곱 — 성분마다 따로

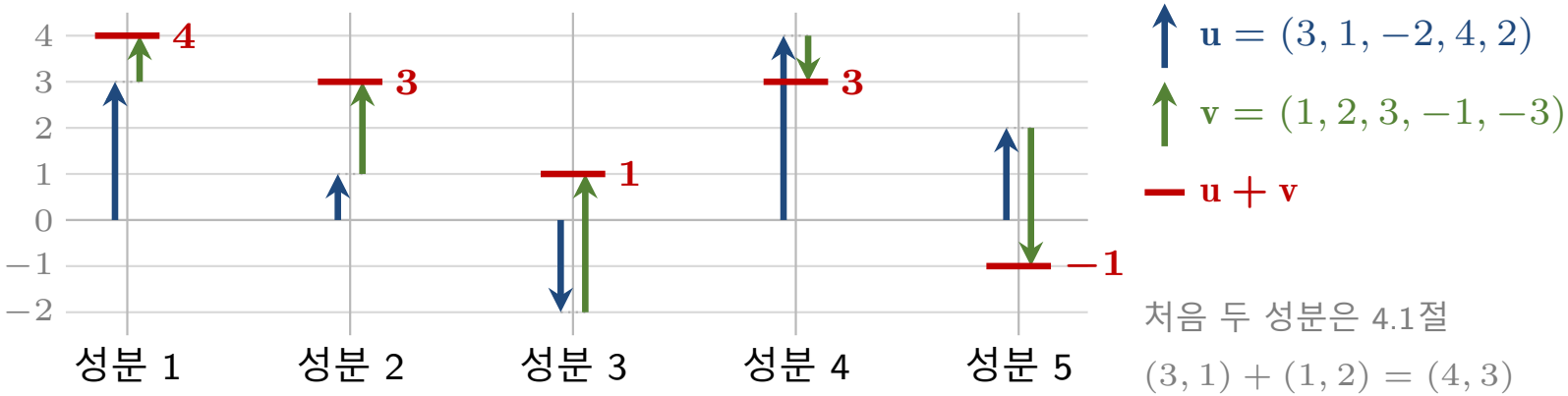
CONCEPT 정의

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 과 실수 k 에 대하여 합과 스칼라 곱은 **성분끼리** 한다.

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1,\ \ldots,\ u_n+v_n), \qquad k\mathbf{u} = (ku_1,\ \ldots,\ ku_n)$$

영벡터 $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$, **음벡터** $-\mathbf{u} = (-u_1,\ldots,-u_n)$.

$\mathbf{u} = \mathbf{v}$ 는 모든 i 에서 $u_i = v_i$ 라는 뜻이다.



$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (3{+}1,\ 1{+}2,\ -2{+}3,\ 4{-}1,\ 2{-}3) = \mathbf{(4,\ 3,\ 1,\ 3,\ -1)}$$

$\mathbb{R}^n$ 의 벡터의 성질 — 정리 4-9

CONCEPT 정리 4-9

$\mathbb{R}^n$ 의 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 와 실수 h, k 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
(2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
(3) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}=\mathbf{0}+\mathbf{u}$
(4) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}$
(5) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
(6) $(h+k)\mathbf{u}=h\mathbf{u}+k\mathbf{u}$
(7) $(hk)\mathbf{u}=h(k\mathbf{u})$
(8) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}, \quad (-1)\mathbf{u}=-\mathbf{u}$

▶ 왜 그런가 — i번째 성분만 보면 실수의 법칙이다 (예: (1), (6))

$$(1)\quad \mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,\ \ldots,\ u_n+v_n)=(v_1+u_1,\ \ldots,\ v_n+u_n)=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

$$(6)\quad (h+k)\mathbf{u}=\big((h+k)u_1,\ \ldots\big)=(hu_1+ku_1,\ \ldots)=h\mathbf{u}+k\mathbf{u}$$

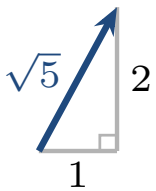
[직관] $\mathbb{R}^n$ 의 계산 $=$ 실수 계산 n 번.
$n\times 1$ 행렬로 보면 (1)∼(7) 은 2장 정리 2-1 그대로다.

n차원 벡터의 크기와 단위벡터

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \text{ 의 } \textbf{크기}: \qquad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

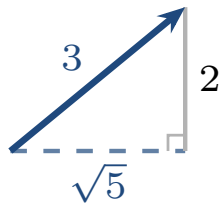
▶ **어디서 나오나 — 성분이 하나 늘 때마다 피타고라스 한 번 (예: $\mathbf{u} = (1, 2, 2, 4)$)**

점선 = 앞 단계의 빗변



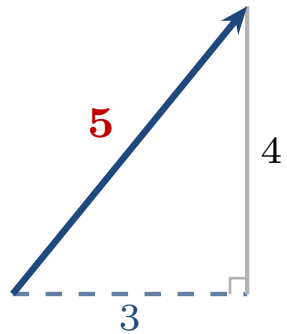
$\mathbb{R}^2$: $(1, 2)$

$\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$



$\mathbb{R}^3$: $(1, 2, 2)$

$\sqrt{5+4} = 3$



$\mathbb{R}^4$: $(1, 2, 2, 4)$ (같은 규칙을 이어 씀)

$\mathbf{\sqrt{9+16} = 5}$

$n \geq 4$ 는 직각을 눈으로 볼 수 없어, 같은 규칙의 식을 크기의 **정의**로 쓴다.

[단위벡터] 크기가 1 인 벡터. 정규화: $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ 이면 $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ (4.1절 정리 4-2 (3)).
예: $\mathbf{u}/5 = (0.2,\ 0.4,\ 0.4,\ 0.8)$, $\|\mathbf{u}/5\|^2 = 0.04 + 0.16 + 0.16 + 0.64 = 1$

예제 4-18 $\mathbb{R}^5$ 벡터의 크기와 단위벡터

다음 $\mathbb{R}^5$ 에 놓인 두 벡터의 크기를 구하고, $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 방향의 단위벡터를 각각 구하라.

$$\mathbf{u} = (2,\ -1,\ -2,\ 0,\ 0), \qquad \mathbf{v} = (-2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1)$$

▶ **크기 = 성분 제곱의 합의 제곱근, 단위벡터 = 벡터 ÷ 크기 (정규화)**

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{4+1+4+0+0} = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{3}(2,\ -1,\ -2,\ 0,\ 0) = \boxed{\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ 0\right)}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+0+4+1} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1)}$$

[검산] $\|\mathbf{u}/3\|^2 = 9/9 = 1, \qquad \|\mathbf{v}/\sqrt{10}\|^2 = 10/10 = 1$

n차원 벡터의 내적

CONCEPT 정의

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 의 **내적**은 대응하는 성분끼리 곱한 값의 합이다.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

▶ 어디서 나오나 — 4.2절 성분식을 늘려 정의로 삼는다

$$\underbrace{u_1 v_1 + u_2 v_2}_{\mathbb{R}^2\ (4.2)} \qquad \underbrace{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}_{\mathbb{R}^3\ (4.3)} \qquad \longrightarrow \qquad \underbrace{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n}_{\mathbb{R}^n}$$

column 벡터로 쓰면 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ (4.2절 맛보기 "내적을 행렬 곱으로 쓰기" 를 n칸으로)

$\mathbf{u}$	3	1	−2	4	2
$\mathbf{v}$	1	2	3	−1	−3
곱	3	2	(−6)	(−4)	(−6)

$$3 + 2 + (-6) + (-4) + (-6) = -11$$

합의 그림과 같은 두 벡터. 세로로 짝지어 곱하고 모두 더하면 수 하나가 된다.

예제 4-19 n차원 내적의 계산

다음 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 의 내적 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 를 구하라.

(a) $\mathbf{u}=(\sqrt{2},\ 0,\ -2,\ 1),\ \ \mathbf{v}=(1,\ -22,\ 0,\ 1)$

(b) $\mathbf{u}=(2,\ \sqrt{3},\ -5,\ 0,\ 1),\ \ \mathbf{v}=(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)$

▶ (a) $\mathbb{R}^4$ — 성분 네 쌍

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\sqrt{2}\cdot 1+0\cdot(-22)+(-2)\cdot 0+1\cdot 1=\sqrt{2}+0+0+1=\boxed{\sqrt{2}+1}$$

▶ (b) $\mathbb{R}^5$ — 성분 다섯 쌍

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=2\cdot 1+\sqrt{3}\cdot 0+(-5)\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 1=2+0-5+0+1=\boxed{-2}$$

[요령] 어느 한쪽 성분이 0 인 자리는 곱이 0 이다.
(a) 는 1·4번째, (b) 는 1·3·5번째 자리만 더하면 된다.

내적의 성질 — 정리 4-10 (1/2)

CONCEPT 정리 4-10

$\mathbb{R}^n$ 의 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 와 실수 k 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(3) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

(4) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$

(5) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$

▶ **왜 그런가 — 합 $\sum_i$ 의 항마다 실수의 법칙 (4.2절 정리 4-5 와 같은 성질)**

(1) $\sum_i u_i v_i = \sum_i v_i u_i$

(2) $\sum_i (u_i + v_i) w_i = \sum_i u_i w_i + \sum_i v_i w_i$

(3) $k\sum_i u_i v_i = \sum_i (k u_i) v_i = \sum_i u_i (k v_i)$

(4) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + \cdots + u_n^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$

(5) $u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 0 \iff u_1 = \cdots = u_n = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(5): 음이 아닌 수들의 합이 0 이면 하나하나가 모두 0 이다.

내적의 성질 — 수의 곱처럼 전개된다 (2/2)

▶ $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$ 을 $(a+b)^2$ 처럼 — 정리 4-10 의 (1), (2), (4) 로 전개

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && (4)\\
&= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && (2)\\
&= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} && (1),\ (2)\\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 && (1),\ (4)
\end{aligned}$$

▶ 확인 — 합과 내적 그림의 $\mathbf{u}=(3,1,-2,4,2)$, $\mathbf{v}=(1,2,3,-1,-3)$

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|(4,3,1,3,-1)\|^2 = 16+9+1+9+1 = 36$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 + 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 = \underbrace{(9+1+4+16+4)}_{34} + 2\underbrace{(-11)}_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} + \underbrace{(1+4+9+1+9)}_{24} = 36$$

[직관] 전개에 성분의 개수 n 이 나오지 않는다. 모든 $\mathbb{R}^n$ 에서 **같은 식**이다.
4.2절 내적의 성질에서 본 주의($\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ 여도 $\mathbf{v}=\mathbf{w}$ 라 할 수 없다)도 그대로다.

$\mathbb{R}^n$ 에서 두 벡터의 사잇각

CONCEPT 정의

영 아닌 두 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 의 **사잇각** θ 를 다음으로 정한다.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \qquad (0 \le \theta \le \pi)$$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ 이면 $(\theta = \pi/2)$ 두 벡터는 **직교**한다고 한다.

▶ 어디서 나오나 — 그릴 수 없으니 순서를 뒤집는다

$\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^3$: 그림에서 θ 를 잰다 $\longrightarrow$ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$ (4.1)

$\mathbb{R}^n$: 성분으로 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 를 구한다 $\longrightarrow$ $\cos\theta$ 를 정한다

분수가 -1 이상 1 이하여야 θ 가 있다. 4.5절 정리 4-12 (코시-슈바르츠) 에서 보인다.

[직관] $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$
앞 쪽 전개에서 $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$. 원점과 두 벡터의 끝이 만드는 삼각형의 **코사인법칙**이다.

예제 4-20 $\mathbb{R}^5$ 에서 두 벡터 사이의 각 (1/2)

$\mathbb{R}^5$ 위의 두 벡터 사이의 각 θ 를 구하라.

$$\mathbf{u} = (-2,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1), \qquad \mathbf{v} = (-1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1)$$

▶ 내적과 크기

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2)(-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 2 + 2 - 1 + 0 + 1 = 4$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 1 + 0 + 1} = \sqrt{7}, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 4 + 1 + 9 + 1} = \sqrt{16} = 4$$

▶ 사잇각

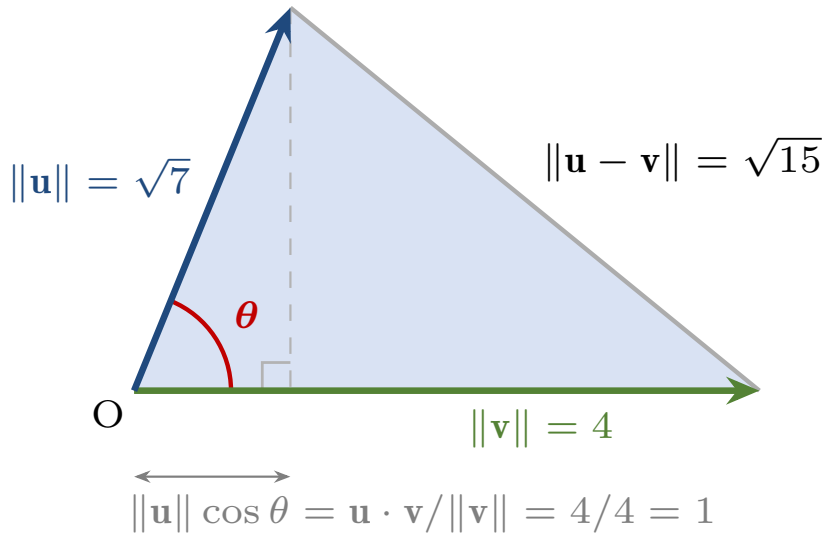
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{7} \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.378 \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{7}} \approx \boxed{67.79^\circ}$$

$\mathbb{R}^5$ 의 두 벡터는 그릴 수 없다. 67.79° 는 어디에 있는 각인가?

예제 4-20 $\mathbb{R}^5$ 에서 두 벡터 사이의 각 (2/2)

SOLUTION 4-20

셋째 변: $\mathbf{u}-\mathbf{v}=(-1,\,-1,\,-2,\,-3,\,0),\quad \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=1+1+4+9+0=15$



$$\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta=7+16-2\cdot\sqrt{7}\cdot 4\cdot(1/\sqrt{7})=23-8=15=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$$

[직관] $\mathbb{R}^n$ 사잇각 쪽의 코사인법칙 삼각형을 세 변 $\sqrt{7},\,4,\,\sqrt{15}$ 로 그렸다.
$\theta\approx 67.79^\circ$ 는 평면에 그린 **이 삼각형의 각**이다.

n차원 벡터의 표현 — 표준단위벡터

CONCEPT 정의

i번째 성분만 1 이고 나머지가 모두 0 인 $\mathbf{e}_i$ 를 $\mathbb{R}^n$ 의 **표준단위벡터**라 한다.

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

▶ 모든 벡터는 $\mathbf{e}_i$ 들의 스칼라 곱의 합이다

$$\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) = (u_1, 0, \ldots, 0) + (0, u_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, u_n)$$

$$= u_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + u_n(0, \ldots, 0, 1) = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n$$

▶ 성분 = 그 방향의 단위벡터와 내적

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = u_1 \cdot 0 + \cdots + u_i \cdot 1 + \cdots + u_n \cdot 0 = u_i, \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \ \ (i \neq j), \qquad \|\mathbf{e}_i\| = 1$$

예: $\mathbf{u} = (3, 1, -2, 4, 2) = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4 + 2\mathbf{e}_5, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_4 = u_4 = 4$

[직관] 4.1절 표준단위벡터 쪽의 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 을 n개로 늘린 **좌표축 방향**이다.

내적에 대한 행렬공식 — 정리 4-11 (1/3)

CONCEPT 정리 4-11

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ($n \times 1$ column), n차 정사각행렬 $\mathbf{A}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{Au} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ (2) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{Av} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

▶ 준비 1 — 내적은 행렬 곱 (4.2절 맛보기 (1/2) 를 n칸으로)

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 + \cdots + u_nv_n \end{bmatrix} \quad (1\times n)(n\times 1) = 1\times 1 : \text{수}$$

▶ 준비 2 — 어느 쪽을 전치해도 값은 같다 (교환법칙, 4.2절 맛보기 (2/2))

$$\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1u_1 + \cdots + v_nu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 + \cdots + u_nv_n \end{bmatrix} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} \qquad \text{(정리 4-10 (1))}$$

예: $\mathbf{u} = (3, 1, -2, 4, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3, -1, -3)$ 이면 $\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = 3 + 2 - 6 - 4 - 6 = -11$.

내적에 대한 행렬공식 — 정리 4-11 (2/3)

▶ **약속 — $\mathbb{R}^n$ 의 벡터는 늘 $n \times 1$ column. row($1 \times n$)는 전치로만 만든다**

내적 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$: $(n \times 1) \cdot (n \times 1)$ — **그대로 성립**: 성분 수 n 만 같으면 된다

행렬 곱 $\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$: $(1 \times n)(n \times 1) = 1 \times 1$ — **안쪽 크기가 맞아야**: $(n \times 1)(n \times 1)$ 은 안 됨

그래서 내적을 행렬 곱으로 쓸 때만 앞 벡터를 전치한다(준비 1). 전치해도 내적의 값은 그대로다.

▶ **(1) $\mathbf{Au} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ — 한 단계씩, 곱의 크기를 따라**

$\mathbf{Au} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{Au})^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$	$(1 \times n)(n \times 1)$	준비 1 : $\mathbf{Au}$ 도 $(n \times n)(n \times 1) = n \times 1$
$= (\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}})\,\mathbf{v}$	$(1 \times n)(n \times n)(n \times 1)$	정리 2-5: $(\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$
$= \mathbf{u}^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v})$	$(1 \times n)\,[\,(n \times n)(n \times 1)\,]$	정리 2-6 (1) 결합법칙
$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$	$(1 \times n)(n \times 1)$	준비 1 을 거꾸로: $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ 도 column

내적에 대한 행렬공식 — 정리 4-11 (3/3)

▶ **(1) 의 다른 길 — 먼저 $\mathbf{v}$ 를 전치해 앞으로 ($\mathbf{v}^{\mathsf{T}}$: $1 \times n$)**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Au} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v}^{\mathsf{T}}(\mathbf{Au}) && \text{준비 1, 2: } (\mathbf{Au})^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}(\mathbf{Au}) \\
&= (\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})\,\mathbf{u} && \text{정리 2-6 (1) 결합법칙} \\
&= (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v})^{\mathsf{T}}\mathbf{u} && \text{정리 2-5, 2-3 (1): } (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v})^{\mathsf{T}} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} && \text{준비 2, 1 (뒤 column 이 } \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

▶ **(2) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{Av} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ — (1) 에서 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 를 맞바꾸고 준비 2**

$$
\mathbf{u} \cdot \mathbf{Av} \overset{\text{준비 2}}{=} \mathbf{Av} \cdot \mathbf{u} \overset{(1)}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} \overset{\text{준비 2}}{=} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}
$$

[직관] $\mathbf{A}$ 를 내적의 반대편으로 옮기면 **전치**가 붙는다.

예제 4-21 내적에 대한 행렬공식의 확인 (1/2)

4차 정사각행렬 $\mathbf{A}$ 와 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ 에 대하여
정리 4-11 (1) $\mathbf{Au} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ 가 성립함을 확인하라.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

▶ 좌변 — $\mathbf{Au}$ 를 먼저 구한다

$$\mathbf{Au} = \begin{bmatrix} -2+3-5-21 \\ 0+3+15+14 \\ -1+6+15+28 \\ 1+0+10-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 32 \\ 48 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Au} \cdot \mathbf{v} = (-25)(5) + (32)(-4) + (48)(0) + (4)(-8) = -125 - 128 + 0 - 32 = \boxed{-285}$$

예제 4-21 내적에 대한 행렬공식의 확인 (2/2)

SOLUTION 4-21

칸 (i,j) 에 $v_i\,a_{ij}\,u_j$ (예: $5\cdot 2\cdot(-1)=-10$). 두 계산은 더하는 **순서**만 다르다.

$v_i \setminus u_j$	-1	3	5	-7	row 합
5	-10	15	-25	-105	-125
-4	0	-12	-60	-56	-128
0	0	0	0	0	0
-8	-8	0	-80	56	-32
column 합	-18	3	-165	-105	$\mathbf{-285}$

$$\text{row } i \text{ 합} = v_i\,(\mathbf{Au})_i\text{:}\quad -125-128+0-32=-285=\mathbf{Au}\cdot\mathbf{v}\qquad \text{(좌변)}$$

$$\text{column } j \text{ 합} = u_j\,(\mathbf{A}^{\mathsf T}\mathbf{v})_j\text{:}\quad -18+3-165-105=-285=\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^{\mathsf T}\mathbf{v}\qquad \text{(우변)}$$

$$\mathbf{A}^{\mathsf T}\mathbf{v}=(18,\,1,\,-33,\,15),\qquad (\mathbf{A}^{\mathsf T}\mathbf{v})_1=2\cdot 5+0\cdot(-4)+1\cdot 0+(-1)(-8)=18$$

[직관] row 합은 $\mathbf{A}$ 의 row 로, column 합은 $\mathbf{A}$ 의 column ($=\mathbf{A}^{\mathsf T}$ 의 row) 으로 계산한다. 좌변 $=$ 우변 $=-285$. 정리 4-11 (1) 그대로 $\mathbf{A}$ 를 반대편으로 옮기면 $\mathbf{A}^{\mathsf T}$ 가 된다.

Chapter 4. n차원 실벡터

4.1 벡터의 정의

4.2 내적

4.3 외적

4.4 n차원 벡터

4.5 벡터의 활용

코시-슈바르츠 부등식 — 정리 4-12 (1/2)

CONCEPT 정리 4-12

임의의 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

▶ 왜 그런가 — $\|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 \geq 0$ 을 t 의 이차식으로 본다

$\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 이면 양변이 0 이다. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 이면 모든 실수 t 에 대하여 (정리 4-10)

$$0 \leq \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 \, t^2 + 2\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, t + \|\mathbf{u}\|^2$$

t^2 의 계수가 양수인 이차식이 음수가 되지 않는다 $\Rightarrow$ 판별식 ≤ 0.

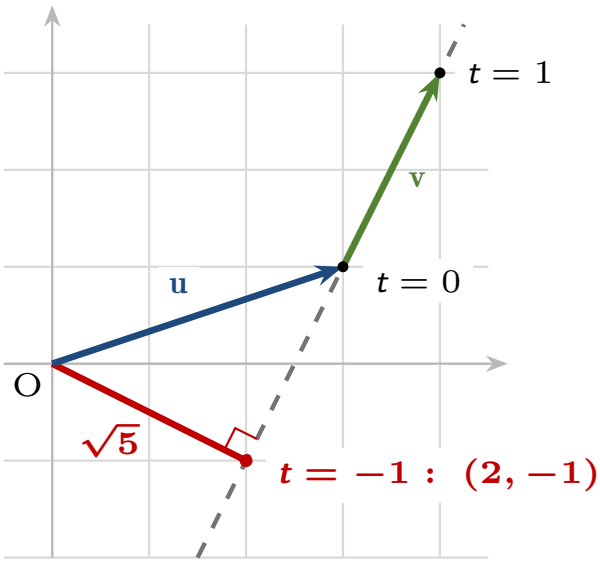
$$\text{판별식}/4 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \;\Rightarrow\; |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

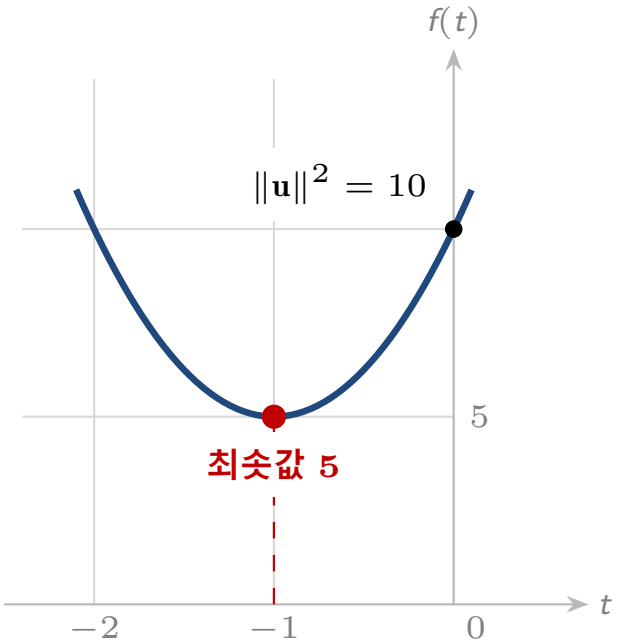
[쓸모] 양변을 $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ 로 나누면 $|\cos\theta| \leq 1 \Rightarrow$ 4.4절 $\mathbb{R}^n$ 사잇각의 근거.

코시-슈바르츠 부등식 — 그림으로 보기 (2/2)

$\mathbf{u} = (3, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2)$: 점 $\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ 는 $\mathbf{u}$ 끝을 지나고 $\mathbf{v}$ 와 평행한 직선을 그린다.

$$f(t) = \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 t^2 + 2\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,t + \|\mathbf{u}\|^2 = 5t^2 + 10t + 10 = 5(t+1)^2 + 5$$





[등호] 직선이 원점을 비켜 가면 최솟값 > 0, 판별식$/4 = 5^2 - 5\cdot 10 = -25 < 0$.
직선이 원점을 지나면(두 벡터가 **한 직선 위**) 최솟값 0, 판별식 0, 곧 등호.

삼각부등식과 피타고라스 정리 — 정리 4-13, 4-14 (1/2)

CONCEPT 정리 4-13, 4-14

임의의 두 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여

정리 4-13 (삼각부등식) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

정리 4-14 (피타고라스 정리) 수직$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0)$이면 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$

▶ **왜 그런가 — 4.4절 내적의 성질의 전개 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$ 에서 가운데 항만 본다**

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \mathbf{2\,(u\cdot v)} + \|\mathbf{v}\|^2$$

정리 4-13: $2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \le 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ (정리 4-12)

$\Rightarrow \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$

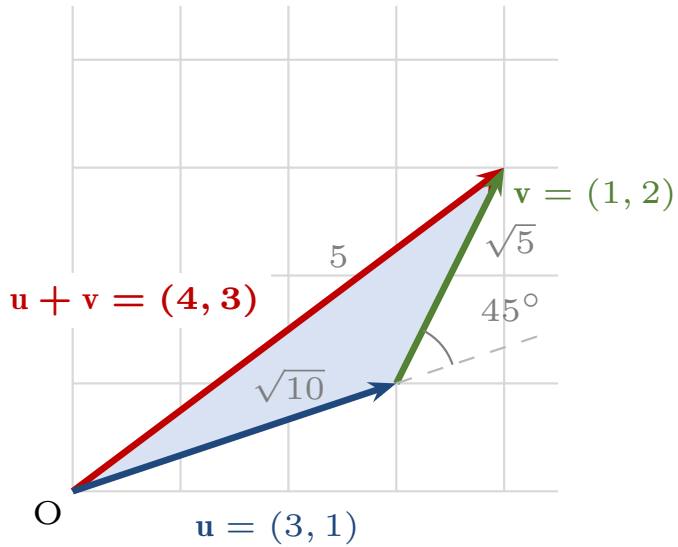
$\Rightarrow \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (양변 ≥ 0)

정리 4-14: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0 \Rightarrow \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ (역: 등식이면 $2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=0$)

[등호] 4-13 은 두 벡터가 같은 방향으로 한 직선 위에 놓일 때(한쪽이 $\mathbf{0}$ 포함).

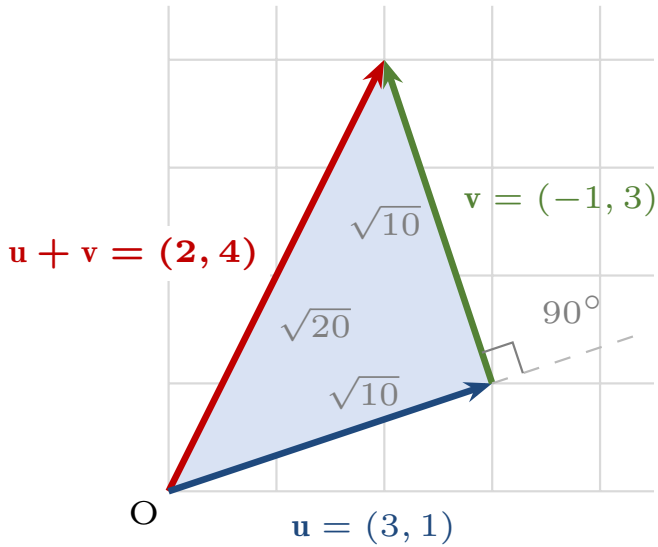
삼각부등식과 피타고라스 정리 — 그림으로 보기 (2/2)

$\mathbf{u} = (3, 1)$ 고정, $\mathbf{v}$ 만 바꿔 본다: $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$



$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3 + 2 = 5$ (사잇각 $45°$)

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = 25 = 10 + 5 + \mathbf{2\cdot 5}$



$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -3 + 3 = 0$ (사잇각 $90°$)

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = 20 = 10 + 10 + \mathbf{2\cdot 0}$

[직관] $\mathbf{u}$ 끝에서 튼 각(점선) = 사잇각. 예각($\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$)이면 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 > \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.
곧장 가는 길 $<$ 꺾어 가는 길: $5 < \sqrt{10} + \sqrt{5} \approx 5.40$, $\sqrt{20} \approx 4.47 < 2\sqrt{10} \approx 6.32$

예제 4-22 코시-슈바르츠 부등식과 삼각부등식 확인

다음 두 벡터에 대하여 코시-슈바르츠 부등식과 삼각부등식이 성립함을 확인하라.

$$\mathbf{u} = (2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3), \qquad \mathbf{v} = (-1,\ -2,\ 1,\ 3,\ 1)$$

▶ 코시-슈바르츠 — 내적과 두 크기

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -2 + 2 + 0 + 6 + 3 = 9$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4+1+0+4+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1+4+1+9+1} = \sqrt{16} = 4$$

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = 9 \ \le\ \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| = 12\sqrt{2} \approx 16.97$$

▶ 삼각부등식 — $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (1,\ -3,\ 1,\ 5,\ 4)$

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \sqrt{1+9+1+25+16} = 2\sqrt{13} \approx 7.21 \ \le\ \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = 3\sqrt{2} + 4 \approx 8.24$$

[근삿값 없이] 제곱끼리 비교: $81 \le 18\cdot 16 = 288$, $\quad 52 \le (3\sqrt{2}+4)^2 = 34 + 24\sqrt{2}$

예제 4-23 수직 확인과 피타고라스 정리

두 벡터 $\mathbf{u} = (2, 3, 0, -1, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, 1, -1, 0, 1)$ 이 수직임을 밝히고 피타고라스 정리가 성립함을 확인하라.

▶ 수직, 곧 직교 — 내적이 0

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 = 0$$

▶ 피타고라스 — 세 크기의 제곱

$$\|\mathbf{u}\|^2 = 4 + 9 + 0 + 1 + 4 + 1 = 19, \qquad \|\mathbf{v}\|^2 = 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1,\ 3,\ 1,\ -2,\ -2,\ 2), \qquad \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 1 + 9 + 1 + 4 + 4 + 4 = 23$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \mathbf{23} = \mathbf{19 + 4} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

[읽는 법] $\mathbb{R}^6$ 의 직각삼각형은 그릴 수 없다. 내적 0 과 제곱의 합이 그 그림을 대신한다.

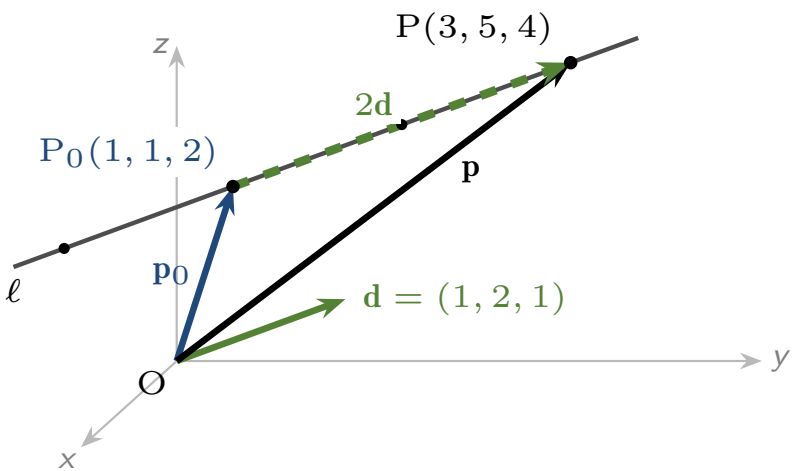
직선의 방정식 — 방향벡터 (1/2)

여기부터 다시 $\mathbb{R}^3$: 점과 방향으로 직선을, 점과 수직인 방향으로 평면을 쓴다.

CONCEPT 정의

한 점 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ 를 지나고 영 아닌 벡터 $\mathbf{d} = (a, b, c)$ 에 평행한 직선에서 $\mathbf{d}$ 를 그 직선의 **방향벡터**(direction vector) 라 한다. 직선은

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = t\,\mathbf{d} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ 를 만족하는 점 } \mathrm{P}(x, y, z) \text{ 전체} \qquad (4.9)$$



t 에 따라 움직이는 점 P

$t = -1$: $(0, -1, 1)$

$t = 0$: $(1, 1, 2) = \mathrm{P}_0$

$t = 1$: $(2, 3, 3)$

$t = 2$: $(3, 5, 4)$

$t < 0$ 이면 P_0 에서 $\mathbf{d}$ 와 반대쪽.

직선의 방정식 — 세 가지 표현 (2/2)

(4.9) $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = t\,\mathbf{d}$ 를 성분으로: $(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = (ta,\ tb,\ tc)$.
오른쪽은 앞 쪽의 직선.

▶ **매개변수 방정식(parametric equations) — 성분마다 한 식**

$$x = x_0 + ta,\quad y = y_0 + tb,\quad z = z_0 + tc \qquad (4.10) \qquad x = 1 + t,\quad y = 1 + 2t,\quad z = 2 + t$$

▶ **벡터 방정식(vector equation) — $\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\mathbf{p}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$**

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{d} \qquad (4.11) \qquad \mathbf{p} = (1, 1, 2) + t\,(1, 2, 1)$$

▶ **대칭 방정식(symmetric equations) — 세 식을 t 에 대해 풀어 같다고 놓는다**

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (a, b, c \neq 0) \qquad (4.12) \qquad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{1}$$

[왜 $a, b, c \neq 0$] $t = (x - x_0)/a$ 처럼 나누기 때문이다.
성분이 0 이면 그 좌표는 상수로 따로 쓴다.

예제 4-24 한 점과 방향벡터로 직선 구하기

다음 점 P 를 지나고 벡터 $\mathbf{d}$ 에 평행한 직선의 방정식을 구하라.

(a) $\mathrm{P}(2,3,-1)$, $\mathbf{d}=(3,-2,-4)$ **(b)** $\mathrm{P}(0,4,7)$, $\mathbf{d}=(3,-2,0)$

▶ **(a)** $(x_0,y_0,z_0)=(2,3,-1)$, $(a,b,c)=(3,-2,-4)$ **를 넣는다**

$$x=2+3t,\quad y=3-2t,\quad z=-1-4t$$

$$\mathbf{p}=(2,3,-1)+t(3,-2,-4),\qquad \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{-4}$$

▶ **(b)** $c=0$ **이라 대칭 방정식 (4.12) 의** $(z-z_0)/c$ **를 쓸 수 없다**

$$x=3t,\quad y=4-2t,\quad z=7$$

$$\mathbf{p}=(0,4,7)+t(3,-2,0),\qquad \frac{x}{3}=\frac{y-4}{-2},\quad z=7$$

[읽는 법] (b) 는 t 가 변해도 $z=7$ 이다. 직선이 평면 $z=7$ 안에 놓여 있다.

예제 4-25 두 점을 지나는 직선 구하기

두 점을 지나는 직선의 (a) 매개변수·벡터 방정식, (b) 대칭 방정식을 구하라.

(a) $\mathrm{P}(3,-5,2)$, $\mathrm{Q}(4,-2,-3)$ **(b)** $\mathrm{P}(0,1,-2)$, $\mathrm{Q}(1,-3,5)$

$\mathrm{P}(x_1,y_1,z_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2,z_2)$ 의 **차** $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 가 방향벡터, P 가 P_0 인 대칭 방정식 (4.12)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\quad (x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2,\ z_1\neq z_2) \tag{4.13}$$

▶ **(a) 방향벡터** $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(4-3,\ -2-(-5),\ -3-2)=(1,3,-5)$ **와 점** P

$$x=3+t,\quad y=-5+3t,\quad z=2-5t,\qquad \mathbf{p}=(3,-5,2)+t\,(1,3,-5)$$

▶ **(b) 분모** $1-0$, $-3-1$, $5-(-2)$ **가 모두** 0 **이 아니므로 (4.13)**

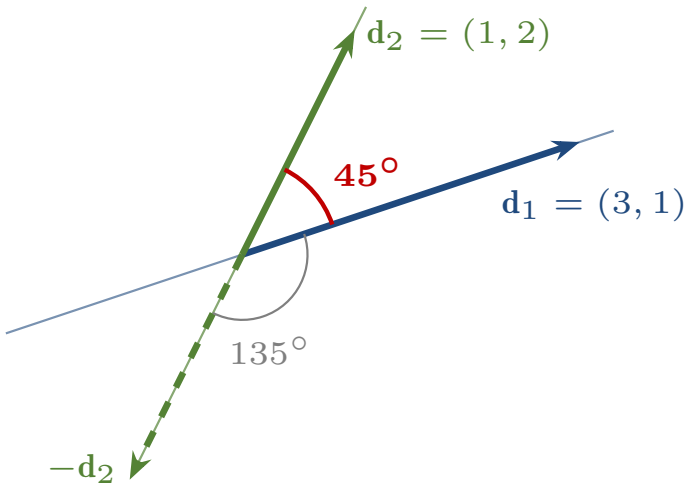
$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{-3-1}=\frac{z-(-2)}{5-(-2)}\ \Rightarrow\ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+2}{7}$$

[검산] (a) $t=1$ 이면 $(4,-2,-3)=\mathrm{Q}$. (b) Q 를 넣으면 세 비가 모두 1.

두 직선이 이루는 각

두 직선의 각 $=$ 두 방향벡터 $\mathbf{d}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{d}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ 의 사잇각

$$\ell_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}, \qquad \ell_2 : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$



직선에는 앞뒤가 없다: $\mathbf{d}_2$ 와 $-\mathbf{d}_2$ 가 같은 직선

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2}{\|\mathbf{d}_1\|\,\|\mathbf{d}_2\|}$$

$$\ell_1 \perp \ell_2 \iff a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

$$\ell_1 \parallel \ell_2 \iff \mathbf{d}_1 = k\mathbf{d}_2 \quad (k \neq 0)$$

$-\mathbf{d}_2$ 로 재면 $180° - \theta$. 예각으로 말할 때는 작은 쪽.

두 직선이 만나지 않아도 같은 식으로 잰다.

[주의] 교재의 비 $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ 는 성분이 0 이면 쓸 수 없다.
$\mathbf{d}_1 = (2, 0, 1)$ 과 $\mathbf{d}_2 = (4, 0, 2) = 2\mathbf{d}_1$ 는 평행인데 $b_1/b_2 = 0/0$ 이다.

예제 4-26 두 직선이 이루는 각 구하기

다음 두 직선이 이루는 각 θ 를 구하라.

(a) $\dfrac{x-7}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-9}{4}$, $\dfrac{x-13}{5}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z+11}{2}$

(b) $\dfrac{x+8}{3}=\dfrac{y-9}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$, $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-16}{-4}=\dfrac{z+7}{1}$

▶ **(a) 방향벡터는 분모:** $\mathbf{d}_1=(-2,3,4)$, $\mathbf{d}_2=(5,-3,2)$

$$\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_2=-10-9+8=-11,\qquad \|\mathbf{d}_1\|^2=4+9+16=29,\qquad \|\mathbf{d}_2\|^2=25+9+4=38$$

$$\cos\theta=\frac{-11}{\sqrt{29}\sqrt{38}}=\frac{-11}{\sqrt{1102}}\approx -0.3314\ \Rightarrow\ \theta\approx 109.35^\circ \quad (\text{예각으로는 } 70.65^\circ)$$

▶ **(b) 방향벡터** $\mathbf{d}_1=(3,-2,1)$, $\mathbf{d}_2=(-3,-4,1)$

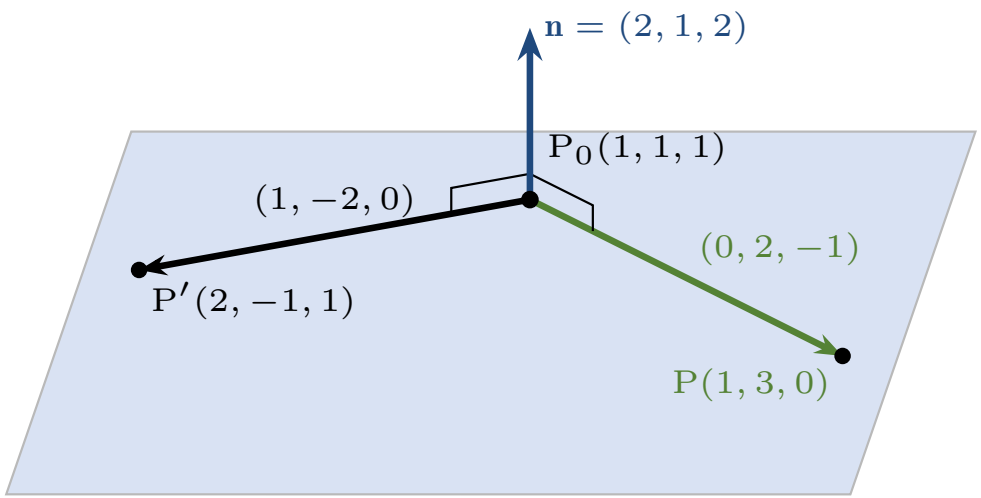
$$\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_2=-9+8+1=0\ \Rightarrow\ \theta=90^\circ,\quad \ell_1\perp\ell_2$$

평면의 방정식 — 법선벡터 (1/3)

CONCEPT 정의

평면에 수직인 영 아닌 벡터 $\mathbf{n}$ 을 그 평면의 **법선벡터**(normal vector) 라 한다.
점 하나와 법선벡터 하나로 평면이 하나 정해진다.

▶ **평면 위의 점 $\mathrm{P} \iff \overrightarrow{\mathrm{P_0P}} \perp \mathbf{n}$ (정리 4-4)**



$$\boxed{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0}$$

$$\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \ \mathbf{p}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$$

$$\mathbf{n} \cdot (0, 2, -1) = 0 + 2 - 2 = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (1, -2, 0) = 2 - 2 + 0 = 0$$

평면의 방정식 — 표준방정식 (2/3)

$\mathbf{n} = (a, b, c)$, $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathrm{P}(x, y, z)$ 로 성분을 쓴다. 오른쪽은 앞 쪽의 평면이다.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0 \qquad (2, 1, 2) \cdot (x - 1,\ y - 1,\ z - 1) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (4.16) \qquad 2(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (4.17) \qquad 2x + y + 2z - 5 = 0$$

$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ $(= -2 - 1 - 2 = -5)$.
(4.17) 을 평면의 **표준방정식**(standard equation) 이라 한다.

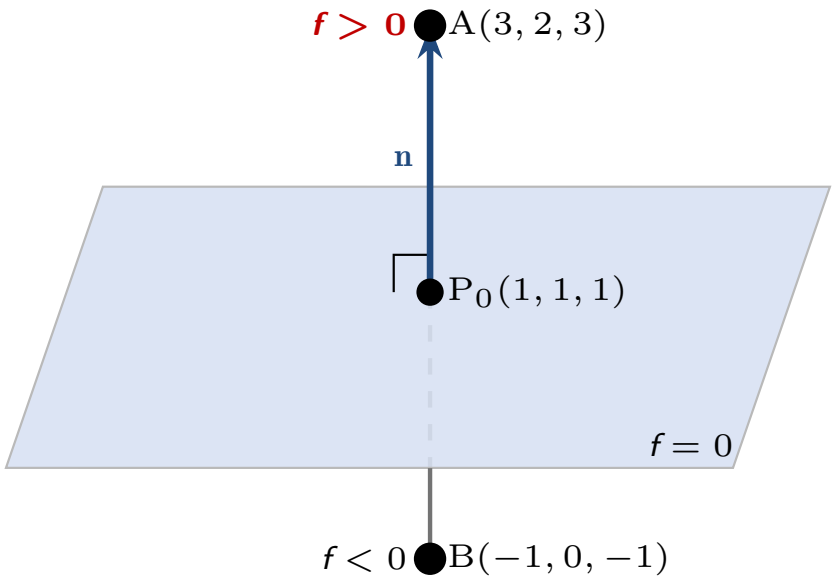
▶ 거꾸로 읽기 — x, y, z 의 계수가 곧 법선벡터

$$ax + by + cz + d = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{n} = (a, b, c), \qquad 2x + y + 2z - 5 = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{n} = (2, 1, 2)$$

[직관] d 는 평면을 법선 방향으로 옮길 뿐이다. 기울기는 (a, b, c) 가 정한다.

평면의 방정식 — 부호의 영역 (3/3)

$f = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0) = 2x+y+2z-5$ 는 일차식 $\Rightarrow$ 평면 $f=0$ 이 공간을 둘로 나눈다.



$$\mathrm{A} = \mathrm{P}_0 + \mathbf{n}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{P}_0 - \mathbf{n}$$

$$f(\mathrm{A}) = 6+2+6-5 = 9 > 0$$

$$f(\mathrm{B}) = -2+0-2-5 = -9 < 0$$

$$f(\mathbf{p}_0 + s\mathbf{n}) = s(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = 9s$$

$s > 0$ 이면 $\mathbf{n}$ 쪽, $s < 0$ 이면 반대쪽.

[읽는 법] $\mathbf{n}$ 이 가리키는 쪽 $+$, 반대쪽 $-$, 평면 위 0.
4.2절 내적 부호의 영역을 한 차원 올린 것이다.

예제 4-27 평면의 방정식 구하기 (1/2)

다음 조건을 만족하는 평면의 방정식을 구하라.

(a) 점 $\mathrm{P}(-5,7,1)$ 을 지나고 법선벡터가 $\mathbf{n}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ 인 평면의 방정식

(b) 점 $\mathrm{P}(0,-3,5)$ 를 지나고 벡터 $\mathbf{n}=2\mathbf{i}+4\mathbf{k}$ 에 수직인 평면의 방정식

(c) 세 점 $\mathrm{P}(4,-3,1)$, $\mathrm{Q}(6,-4,7)$, $\mathrm{R}(1,2,2)$ 를 지나는 평면의 방정식

▶ **(a)** $\mathbf{n}=(2,-3,4)$, $\mathrm{P}(-5,7,1)$ **을 (4.16)** $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ **에**

$$2(x+5)-3(y-7)+4(z-1)=0$$
$$\Rightarrow\ 2x+10-3y+21+4z-4=0\ \Rightarrow\ 2x-3y+4z+27=0$$

▶ **(b)** $\mathbf{n}=(2,0,4)$ **: j 성분이** 0

$$2(x-0)+0\,(y+3)+4(z-5)=0$$
$$\Rightarrow\ 2x+4z-20=0 \qquad (\text{양변을 } 2 \text{ 로 나누면 } x+2z-10=0)$$

[읽는 법] (b) 는 식에 y 가 없다. y 는 아무 값이나 되므로 평면이 y 축과 평행하다.

예제 4-27 평면의 방정식 구하기 (2/2)

SOLUTION 4-27

▶ **(c) 법선벡터는 평면 위 두 벡터에 모두 수직 ⇒ 외적 (정리 4-7 (1)(2))**

$$\overrightarrow{PQ} = (6-4,\ -4+3,\ 7-1) = (2,-1,6), \qquad \overrightarrow{PR} = (1-4,\ 2+3,\ 2-1) = (-3,5,1)$$

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \right)$$
$$= \big(-1-30,\ -(2+18),\ 10-3\big) = (-31,-20,7)$$

▶ **점 $P(4,-3,1)$ 과 $\mathbf{n}$ 을 (4.16) $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ 에**

$$-31(x-4)-20(y+3)+7(z-1)=0 \ \Rightarrow\ -31x+124-20y-60+7z-7=0$$
$$\Rightarrow\ -31x-20y+7z+57=0 \ \Rightarrow\ 31x+20y-7z-57=0$$

검산: Q: $186-80-49-57=0$, R: $31+40-14-57=0$

[3장] $X(x,y,z)$ 일 때 세 row $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ 의 3차 $\det = \overrightarrow{PX}\cdot\mathbf{n}$ (외적의 성분 공식).
3차 $\det$ = 부호 있는 부피: 네 점 X, P, Q, R 이 한 평면 위 $\iff$ 부피 0 $\iff$ 위 식.

예제 4-28 직선과 평면의 교점

다음 직선 ℓ 과 평면 π 의 교점의 좌표를 구하라.

$$\pi:\ x-2y+z-3=0, \qquad \ell:\ \frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{2}$$

▶ **직선을 매개변수로 — 세 비를 t 로 놓는다**

$$x=1-2t, \qquad y=3-t, \qquad z=-2+2t$$

▶ **평면에 넣으면 t 의 일차방정식**

$$(1-2t)-2(3-t)+(-2+2t)-3=0$$
$$\Rightarrow\ 1-2t-6+2t-2+2t-3=0\ \Rightarrow\ 2t-10=0\ \Rightarrow\ t=5$$

$$(x,\,y,\,z)=(1-10,\ 3-5,\ -2+10)=(-9,\,-2,\,8)$$

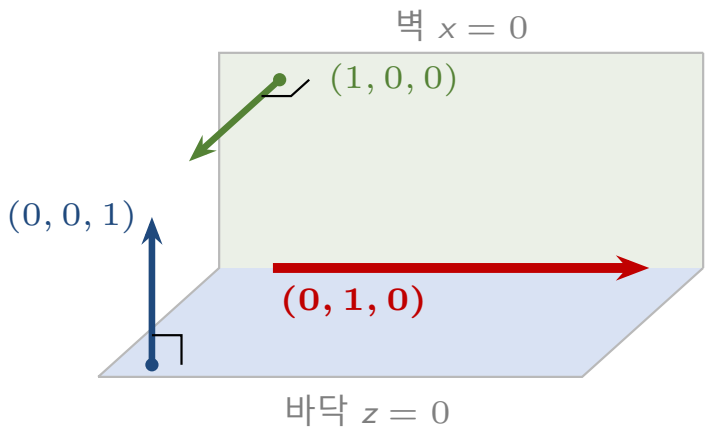
[검산] $-9-2\cdot(-2)+8-3=-9+4+8-3=0$. 교점이 평면 위에 있다.

예제 4-29 두 평면의 교선 (1/2)

다음 두 평면 π_1, π_2 의 교선의 방정식을 구하라.

$$\pi_1 : \ 2x - y + z + 1 = 0, \qquad \pi_2 : \ x + 2y - z + 2 = 0$$

▶ **교선의 방향 — 두 평면에 모두 들어 있으므로 $\mathbf{n}_1$ 에도 $\mathbf{n}_2$ 에도 수직**



예: 바닥과 벽의 교선은 y 축.

$$(0, 0, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, 0)$$

두 법선벡터에 모두 수직인 방향은 외적 (정리 4-7 (1)(2)).

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (2, -1, 1) \times (1, 2, -1) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \big(1 - 2, \ -(-2 - 1), \ 4 + 1\big) = (-1, 3, 5)$$

예제 4-29 두 평면의 교선 (2/2)

SOLUTION 4-29

▶ **교선 위의 한 점 — $x=0$ 으로 놓고 두 식을 푼다**

$$\begin{cases} -y+z+1=0 \\ 2y-z+2=0 \end{cases}$$

더하면 $y+3=0 \;\Rightarrow\; y=-3, \quad z=y-1=-4 \quad\Rightarrow\quad (0,\,-3,\,-4)$

방향의 x 성분이 $-1\neq 0$ 이라 교선은 평면 $x=0$ 과 반드시 만난다.

▶ **대칭 방정식 (4.12) — 점 $(0,-3,-4)$ 와 방향벡터 $(-1,3,5)$ 를 넣는다**

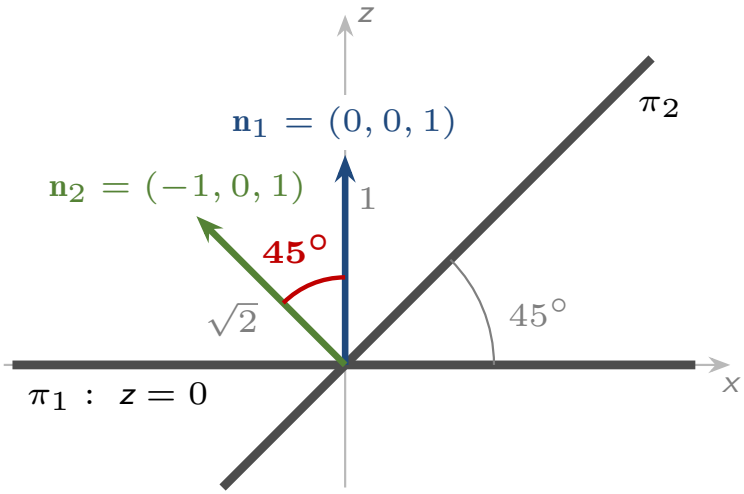
$$\boxed{\frac{x}{-1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{5}}$$

[검산] 세 비가 1 인 점 $(-1,0,1)$ 을 넣으면

π_1: $-2-0+1+1=0$, $\quad$ π_2: $-1+0-1+2=0$

두 평면이 이루는 각

두 평면 π_1, π_2 의 각 $=$ 두 법선벡터의 사잇각.
법선벡터는 x, y, z 의 계수 (평면의 방정식 (2/3)): $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.



π_2 : $-x + z = 0$ (y 축 방향에서 본 단면)

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\|\,\|\mathbf{n}_2\|}$$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \iff a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \mathbf{n}_1 = k\mathbf{n}_2 \quad (k \neq 0)$$

그림: $\cos\theta = \dfrac{0+0+1}{1\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 곧 $45°$

[직관] 평면을 기울인 만큼 법선벡터도 똑같이 기운다.
평행 판정도 비가 아니라 $\mathbf{n}_1 = k\mathbf{n}_2$ 로 한다(성분이 0 이어도 된다).

예제 4-30 두 평면이 이루는 각 구하기

다음 두 평면 π_1, π_2 가 이루는 각 θ 를 구하라.

(a) $\pi_1 : \ 3x-7y+32=0, \quad \pi_2 : \ -5x-2y+3z-4=0$

(b) $\pi_1 : \ -2x+3y-4z-3=0, \quad \pi_2 : \ 4x-6y+8z+9=0$

▶ **(a) z 항이 없으므로 $\mathbf{n}_1=(3,-7,0)$, 그리고 $\mathbf{n}_2=(-5,-2,3)$**

$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=-15+14+0=-1, \quad \|\mathbf{n}_1\|^2=9+49+0=58, \quad \|\mathbf{n}_2\|^2=25+4+9=38$$

$$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{58}\sqrt{38}}=\frac{-1}{\sqrt{2204}}\approx -0.0213 \ \Rightarrow \ \theta\approx 91.22^\circ \quad (\text{예각으로는 } 88.78^\circ)$$

▶ **(b) $\mathbf{n}_1=(-2,3,-4)$, $\mathbf{n}_2=(4,-6,8)=-2\,\mathbf{n}_1$**

$$\cos\theta=\frac{-8-18-32}{\sqrt{29}\sqrt{116}}=\frac{-58}{58}=-1 \ \Rightarrow \ \theta=180^\circ, \quad \pi_1 \parallel \pi_2$$

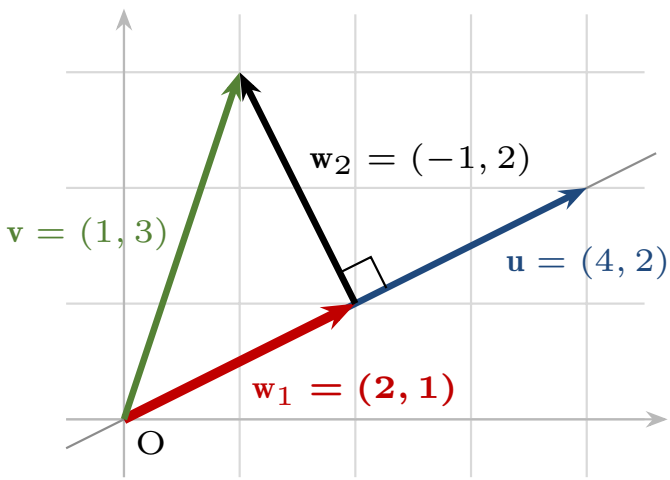
[읽는 법] (b) $\pi_2 \div (-2)$: $-2x+3y-4z-9/2=0$. 법선벡터는 $\mathbf{n}_1$ 과 같아지지만 상수항 $-9/2 \neq -3$ 이라 두 평면은 겹치지 않는다.

정사영과 벡터성분

CONCEPT 정의

$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ 일 때 $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ ($\mathbf{w}_1 \parallel \mathbf{u}$, $\mathbf{w}_2 \perp \mathbf{u}$) 로 나눈다.
$\mathbf{w}_1$ 은 4.2절에서 본 $\mathbf{u}$ 위로의 $\mathbf{v}$ 의 정사영을 **벡터로** 쓴 것이고,
$\mathbf{w}_2$ 를 $\mathbf{u}$ 에 수직인 $\mathbf{v}$ 의 **벡터성분**(vector component) 이라 한다.

$$\mathbf{w}_1 = \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} \quad (4.18) \qquad \mathbf{w}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} \quad (4.19)$$



예: $\mathbf{u} = (4, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 3)$

$$\mathbf{w}_1 = (2, 1) = \mathbf{u}/2$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{w}_1 = (1, 3) - (2, 1) = (-1, 2)$$

$$\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u} = -4 + 4 = 0$$

$\mathbf{v}$ 끝에서 $\mathbf{u}$ 의 직선에 내린
수선의 발 $= \mathbf{w}_1$ 의 끝.

정사영 — 정리 4-15

CONCEPT 정리 4-15

$\mathbb{R}^3$ 의 벡터 $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ 에 대해 $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ ($\mathbf{u}$ 의 정규화) 일 때, 다음이 성립한다.

(1) $\text{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,\hat{\mathbf{u}}$

(2) $\|\text{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}\| = |\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}}|$

▶ 왜 그런가 — $\mathbf{w}_1 = k\hat{\mathbf{u}}$ 로 두고 $\mathbf{w}_2 \perp \hat{\mathbf{u}}$ 에서 k 를 구한다

$$0 = \mathbf{w}_2\cdot\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{v} - k\hat{\mathbf{u}})\cdot\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}} - k\,(\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}} - k \;\Rightarrow\; k = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}}$$

$$\|\text{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,\hat{\mathbf{u}}\| = |\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}}|\,\|\hat{\mathbf{u}}\| = |\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}}| \qquad (\text{정리 4-2 (2) } \|c\,\hat{\mathbf{u}}\| = |c|\,\|\hat{\mathbf{u}}\|,\ \|\hat{\mathbf{u}}\| = 1)$$

$$(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u} \qquad \text{앞 쪽: } \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u} = \frac{10}{20}\,(4,2) = (2,1)$$

[직관] 어떤 방향의 성분을 알고 싶으면 **그 방향의 단위벡터와 내적** ($\mathbb{R}^n$ 에서도 같다).

예제 4-31 정사영과 벡터성분 구하기

두 벡터 $\mathbf{v}=(2,3,-1)$, $\mathbf{u}=(-2,1,-4)$ 에 대하여
$\mathbf{u}$ 위로의 $\mathbf{v}$ 의 정사영 $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ 와 $\mathbf{u}$ 에 수직인 $\mathbf{v}$ 의 벡터성분 $\mathbf{w}_2$ 를 구하라.

▶ **정리 4-15 (1) $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|^2)\,\mathbf{u}$ 에 필요한 두 수**

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=-4+3+4=3, \qquad \|\mathbf{u}\|^2=4+1+16=21$$

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}=\frac{3}{21}(-2,1,-4)=\frac{1}{7}(-2,1,-4)=\left(-\frac{2}{7},\ \frac{1}{7},\ -\frac{4}{7}\right)$$

▶ **벡터성분 — 식 (4.19)**

$$\mathbf{w}_2=\mathbf{v}-\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}=\left(2+\frac{2}{7},\ 3-\frac{1}{7},\ -1+\frac{4}{7}\right)=\left(\frac{16}{7},\ \frac{20}{7},\ -\frac{3}{7}\right)$$

[검산] $\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{u}=(1/7)(-32+20+12)=0, \qquad \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}+\mathbf{w}_2=(2,3,-1)=\mathbf{v}$

점과 직선 사이의 거리 — 정리 4-16 (1/2)

CONCEPT 정리 4-16

$\mathbb{R}^3$ 의 한 점 P 에서 직선 ℓ 에 이르는 거리 D 는 다음과 같다.

$$D = \frac{1}{\|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\|}\,\|\overrightarrow{\mathrm{QR}} \times \overrightarrow{\mathrm{QP}}\|$$

여기서 Q, R 은 직선 ℓ 위에 있는 임의의 서로 다른 두 점이다.

▶ 왜 그런가 — $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 가 만드는 평행사변형 (4.3절 외적의 정의 (1/3))

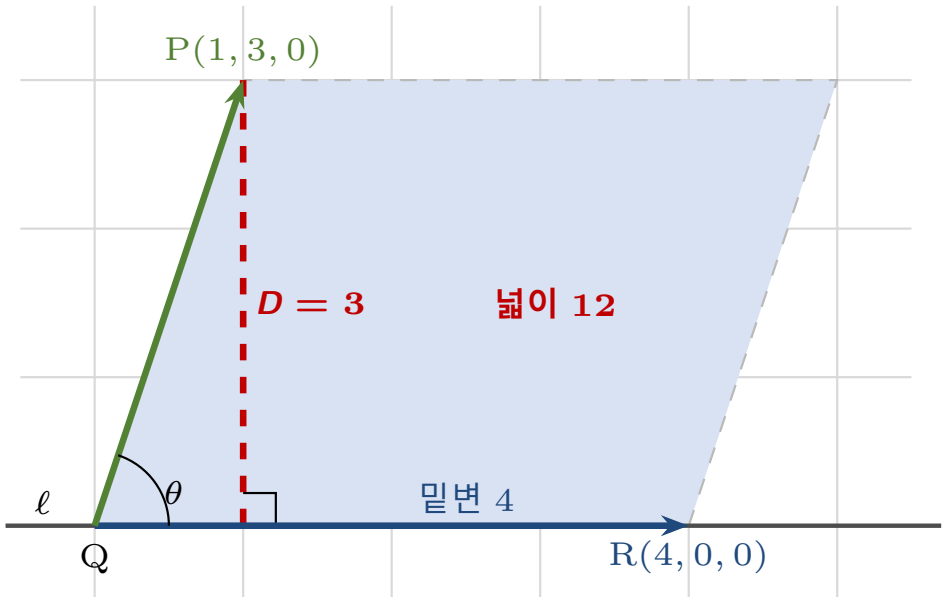
$$\underbrace{\|\overrightarrow{\mathrm{QR}} \times \overrightarrow{\mathrm{QP}}\|}_{\text{넓이}} = \underbrace{\|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\|}_{\text{밑변}} \times \underbrace{\|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\|\sin\theta}_{\text{높이 } D} \;\Rightarrow\; D = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{QR}} \times \overrightarrow{\mathrm{QP}}\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\|}$$

θ 는 $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ 과 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 의 사잇각. P 에서 ℓ 에 내린 수선의 길이가 곧 $\|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\|\sin\theta$.

[직관] 높이 = 넓이 ÷ 밑변. Q, R 을 어디로 잡아도 D 는 같다.

점과 직선 사이의 거리 — 그림으로 보기 (2/2)

xy 평면($z = 0$) 위의 예: $\mathrm{Q}(0,0,0)$, $\mathrm{R}(4,0,0)$ 을 지나는 직선 ℓ 과 점 $\mathrm{P}(1,3,0)$.



$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = (4,0,0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (1,3,0)$$

격자를 세어도 높이는 3.

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 12$$

3장: 2차 $\det$ = 두 row 의 평행사변형의 부호 있는 넓이. xy 평면에서는 외적의 z 성분 (4.3절 왜 외적인가).

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} \times \overrightarrow{\mathrm{QP}} = (0,\ 0,\ 4 \cdot 3 - 0 \cdot 1) = (0,0,12), \qquad D = \frac{\|(0,0,12)\|}{\|(4,0,0)\|} = \frac{12}{4} = 3$$

[직관] 넓이 12 = 밑변 4 × 높이 3. 높이 = 넓이 ÷ 밑변.

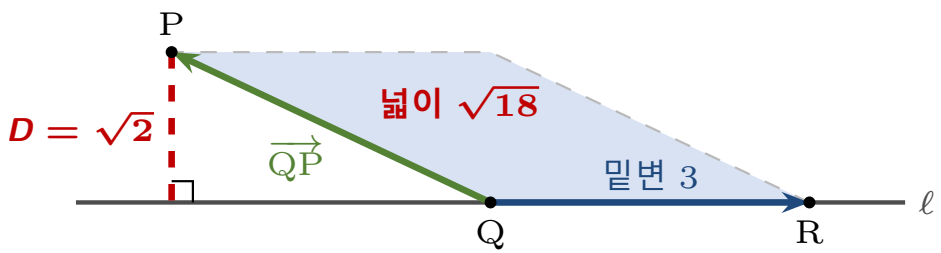
예제 4-32 점과 직선 사이의 거리 구하기

점 $\mathrm{P}(-1,2,1)$ 에서 직선 $\ell:\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{-2}$ 에 이르는 거리 D 를 구하라.

▶ **직선 위의 두 점 $\mathrm{Q}(2,3,0)$ $(t=0)$, $\mathrm{R}(4,4,-2)$ $(t=1)$ 과 외적**

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(4-2,\ 4-3,\ -2-0)=(2,1,-2),\qquad \overrightarrow{\mathrm{QP}}=(-1-2,\ 2-3,\ 1-0)=(-3,-1,1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\times\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\big(1\cdot 1-(-2)(-1),\ -\big(2\cdot 1-(-2)(-3)\big),\ 2\cdot(-1)-1\cdot(-3)\big)=(-1,4,1)$$



P, Q, R 이 놓인 평면을 정면으로 본 모양.

어느 좌표평면과도 평행하지 않은 평면

$\Rightarrow$ 2차 det 하나로는 못 구한다

(4.3절 왜 외적인가).

정리 4-16: $D=\dfrac{\|(-1,4,1)\|}{\|(2,1,-2)\|}=\dfrac{\sqrt{1+16+1}}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{\sqrt{18}}{3}=\dfrac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

점과 평면 사이의 거리 — 정리 4-17 (1/3)

CONCEPT 정리 4-17

점 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ 와 평면 $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리 D 는

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

▶ **왜 그런가 — 평면 위 한 점 $\mathrm{Q}(x_1, y_1, z_1)$ 에서 본 높이 = 법선 방향 정사영의 크기**

$$D = \|\mathrm{proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{\mathrm{QP}_0}\| = \left|\overrightarrow{\mathrm{QP}_0} \cdot \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}\right| = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{QP}_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

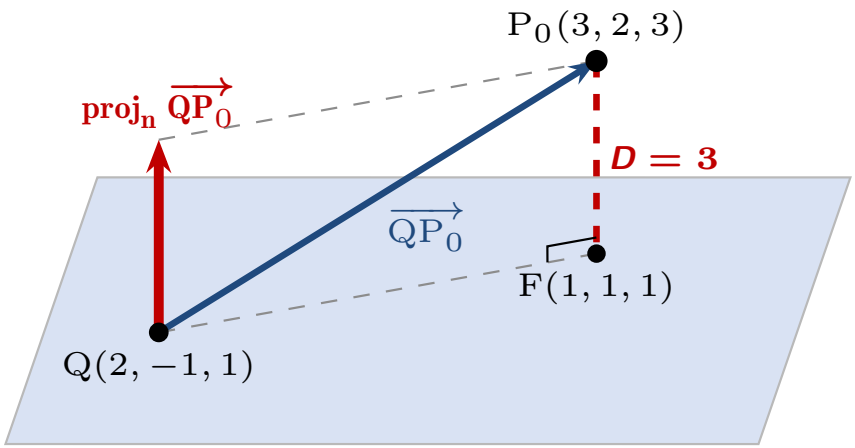
정리 4-15 (2) $\|\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}\| = |\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{u}}|$ 에서 $\mathbf{u}=\mathbf{n}=(a,b,c)$, $\mathbf{v}=\overrightarrow{\mathrm{QP}_0}$, $\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|$

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}_0}\cdot\mathbf{n} = a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1) = ax_0+by_0+cz_0-(ax_1+by_1+cz_1)$$
$$= ax_0+by_0+cz_0+d \qquad (\mathrm{Q}\text{ 가 평면 위: } ax_1+by_1+cz_1=-d)$$

[주의] P_0 는 평면 **밖**의 점. 평면 위의 점은 Q (평면의 방정식 쪽의 P_0 자리).

점과 평면 사이의 거리 — 그림으로 보기 (2/3)

부호의 영역 쪽과 같은 평면 $2x+y+2z-5=0$: $\mathbf{n}=(2,1,2)$, $\|\mathbf{n}\|=3$.
이름: 그 쪽의 $\mathrm{A}(3,2,3)$ → 이 쪽의 P_0, 그 쪽의 $\mathrm{P}_0(1,1,1)$ → 수선의 발 F.



$$\overrightarrow{\mathrm{QP}_0}=(1,3,2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}_0}\cdot\mathbf{n}=2+3+4=9$$

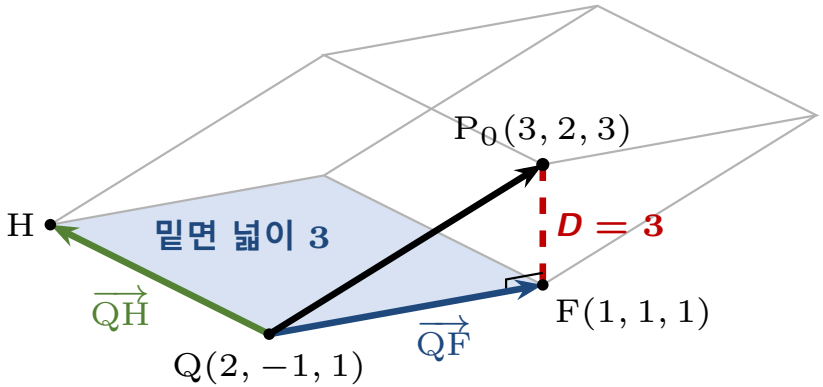
$$D=\frac{9}{\|\mathbf{n}\|}=\frac{9}{3}=3$$

공식: $D=\dfrac{|2\cdot 3+2+2\cdot 3-5|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{9}{3}=3$

[검산] $\|\overrightarrow{\mathrm{FP}_0}\|=\|(2,1,2)\|=3$, 곧 그 쪽의 $f(\mathrm{A})=9$ 를 $\|\mathbf{n}\|=3$ 으로 나눈 값이다.

점과 평면 사이의 거리 — 부피 ÷ 밑면 넓이 (3/3)

4.3절 스칼라 삼중적 (2/2) 의 밑면 넓이 × 높이 = 부피 를 높이로 푼다.



밑면 — 외적이 $\mathbf{n}$ 이 되게 고른 두 모서리

$(-1,2,0) \times (0,-2,1) = (2,1,2) = \mathbf{n}$

밑면 넓이 $= \|\mathbf{n}\| = 3$

$D =$ 부피 $\div$ 밑면 넓이 $= 9 \div 3 = 3$

▶ **부피 — $\overrightarrow{QP_0}$, $\overrightarrow{QF}$, $\overrightarrow{QH}$ 를 row 로 쌓은 3차 행렬식 (row 1 의 여인자 $= \mathbf{n}$)**

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbf{2} + 3 \cdot \mathbf{1} + 2 \cdot \mathbf{2} = 9 = \overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}$$

[3장] 3차 $\det$ = 세 row 가 만드는 평행육면체의 **부호 있는 부피**.
정리 4-17 의 분자 $|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|$ = 부피, 분모 $\|\mathbf{n}\|$ = 밑면 넓이 (밑면의 외적이 $\mathbf{n}$ 일 때).

예제 4-33 점과 평면, 평면과 평면 사이의 거리

다음을 구하라.
(a) 점 $\mathrm{P}(7,-3,4)$ 에서 평면 $3x-2y+z-3=0$ 에 이르는 거리
(b) 두 평면 $2x+4y-4z=7,\ -x-2y+2z=-3$ 사이의 거리

▶ **(a) 정리 4-17 에 바로 넣는다**

$$D=\frac{|3\cdot 7-2\cdot(-3)+1\cdot 4-3|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{|21+6+4-3|}{\sqrt{14}}=\frac{28}{\sqrt{14}}=2\sqrt{14}\approx 7.48$$

▶ **(b) 먼저 평행한지 본다:** $(2,4,-4)=-2\,(-1,-2,2)\Rightarrow$ **평행**

둘째 평면 위의 점 $(3,0,0)$ $(-3-0+0=-3$ 으로 확인) 에서
첫 평면 $2x+4y-4z-7=0$ 까지:

$$D=\frac{|2\cdot 3+4\cdot 0-4\cdot 0-7|}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{|-1|}{\sqrt{36}}=\frac{1}{6}$$

[읽는 법] 평행한 두 평면은 어느 점에서 재도 거리가 같다. 만나는 두 평면이면 0.

Thank you

Dept. of Control and Instrumentation Engineering,
Pukyong National Univ., Busan, Korea.