선형대수학 Report #2 — 풀이

4장 n차원 실벡터 (4.1 ∼ 4.4)

문제 1. [4.2 내적]

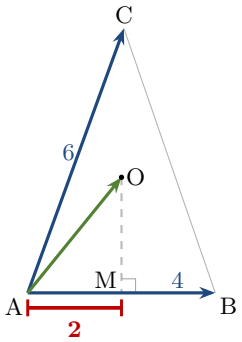
삼각형 ABC 에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=6$ 이고, 점 O 는 삼각형 ABC 의 외심(세 꼭짓점에서 같은 거리에 있는 점)이다. 다음을 구하라.

(a) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$

(b) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$

(c) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$

풀이



$\overline{OA}=\overline{OB}$ 이므로 O 는 변 AB 의 수직이등분선 위에 있고, O 를 직선 AB 위로 수직으로 내린 발은 AB 의 중점 M 이다. 즉 $\overrightarrow{AO}$ 를 $\overrightarrow{AB}$ 위로 내린 부호 있는 길이는 $+\overline{AM}=2$ (M 이 A 에서 B 쪽이라 양수. 4.2 내적의 정의 — 부호 있는 길이로 읽기).

(a) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|\times 2=4\times 2=8$.

(b) 같은 이유로 발은 AC 의 중점: $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times 3=18$.

(c) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 이므로 정리 4-5 (2)(3)(4) 로 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=18-8=10$.

[다른 풀이 — 정리 4-5 전개] $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$ 이고 $\|\overrightarrow{OB}\|=\|\overrightarrow{AO}\|$ 이므로, 양변을 제곱해 정리 4-5 로 전개하면

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2-2\,\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\|\overrightarrow{AO}\|^2=\|\overrightarrow{AO}\|^2\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2=8.$$

(b) 도 같은 식으로 $\frac{1}{2}\cdot 6^2=18$.
일반적으로 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$. 둔각삼각형이어서 O 가 삼각형 밖에 있어도 발은 중점이고 부호도 양수 그대로다. 그래서 답은 $\angle A$ 의 크기와 관계없다.

[답] (a) 8 (b) 18 (c) 10

문제 2. [4.3 외적]

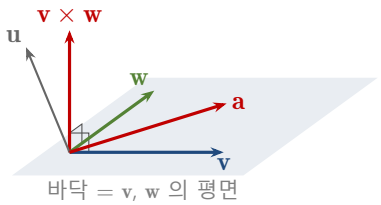
$\mathbb{R}^3$ 의 세 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 에 대하여 $\mathbf{a} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ 라 하자. 다음 값을 구하라.

(1) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{v})$

(2) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$

풀이

기하로 보기. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 는 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 에 수직(정리 4-7 (1)(2))이므로 두 벡터가 만드는 평면(오른쪽 그림의 바닥)에 수직이다. $\mathbf{a} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ 는 다시 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 에 수직이라 바닥 위로 돌아온다 (외적을 두 번 하면 평면으로의 회귀, 정리 4-7 (4)).



바닥 = v, w 의 평면

a 는 바닥 위, w × v 는 아래쪽 수직

(1) $\mathbf{w}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ 가 모두 바닥 위에 있으므로 세 벡터의 평행육면체는 납작하다. 부피 0 이므로 스칼라 삼중적도 0 이다 (정리 4-8). $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) = 0$

(2) $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ 는 바닥에 수직이고 $\mathbf{a}$ 는 바닥 위에 있다. 수직인 두 벡터의 내적이므로 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = 0$

식으로 확인(선택). 정리 4-7 (4) 에서 $\mathbf{a} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$. (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ (정리 4-6 (3)(4), (6) $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$) 이고 $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = 0$ (정리 4-7 (1)). (2) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = 0$, $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = 0$ (정리 4-7 (2)(1)) 이므로 두 항 모두 0.

예외. 위의 기하는 $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 일 때다. $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 가 평행하거나 하나가 $\mathbf{0}$ 이면 $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ 라 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u}$ 가 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 와 평행하거나 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 이어도 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (정리 4-6 (4)(5)(6)). 어느 경우든 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 라 두 값 모두 0 이다.

[답] (1) 0 (2) 0 ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 가 무엇이든)

문제 3. [4.4 n차원 벡터]

$\mathbb{R}^7$ 의 두 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 가 다음을 만족한다. 성분은 주어지지 않는다.

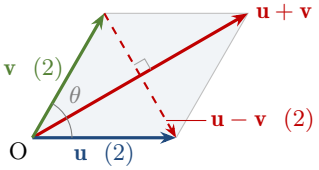
$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 2$$

(a) $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 의 사잇각 θ 를 구하라.

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ 를 구하라.

(c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ 와, $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 의 사잇각을 구하라.

풀이



기하. $\mathbb{R}^7$ 이라도 두 벡터는 한 평면 위의 그림으로 읽는다(예제 4-20 (2/2) 처럼). O 와 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 의 끝점은 세 변이 모두 2 인 **정삼각형**이고, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ 는 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 로 만든 **마름모의 두 대각선**이다.

(a) 정삼각형의 각이므로 $\theta = \pi/3$. 식으로: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (정리 4-10 (1)~(4) 의 전개에서 $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$) $\Rightarrow 4 = 8 - 2\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2$, $\cos\theta = 2/(2 \cdot 2) = 1/2$.

(b) 마름모의 두 대각선은 수직이다: 정리 4-10 (1)∼(4) 로 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 4-4 = 0$.

(c) 긴 대각선 = 정삼각형 높이 $\sqrt{3}$ 의 두 배 $= 2\sqrt{3}$ ($\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = 4+4+2\cdot 2 = 12$). 대각선은 θ 를 이등분하므로 사잇각 $\varphi = \pi/6$ ($\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = 4+2 = 6$, $\cos\varphi = 6/(2\cdot 2\sqrt{3}) = \sqrt{3}/2$).

[답] (a) $\theta = \pi/3$ (b) 0 (c) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = 2\sqrt{3}$, 사잇각 $\pi/6$