Robotics
응용로봇공학및설계

Chapter 3

위치와 방향
(Position and Orientation)

좌표계 · 위치벡터 · 회전행렬

Department of Control & Instrumentation Engineering
Pukyong National University, Busan, Korea
pnj@pknu.ac.kr

Chapter 3. 위치와 방향

3.1 좌표계와 위치

3.2 회전행렬

[왜 필요한가] 로봇팔이 물체를 다루려면 물체의 위치와 방향을 수치로 나타내야 한다. 그 기준이 되는 좌표계와 위치벡터를 정의한다.

학습목표

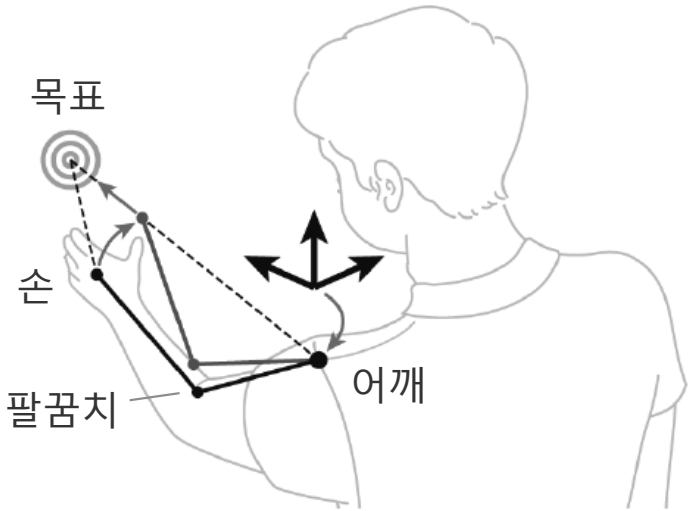
- 위치 · 방향 · 자세를 구별하고 로봇팔에 필요한 **자유도**를 설명할 수 있다.
- **위치벡터**로 점의 위치를 기준 좌표계의 성분으로 나타낼 수 있다.
- **회전행렬**로 점의 좌표를 한 좌표계에서 다른 좌표계로 변환할 수 있다.
- 기본 회전행렬 $\mathbf{R}_X$, $\mathbf{R}_Y$, $\mathbf{R}_Z$ 를 쓰고 **회전행렬의 역**(전치행렬)을 구할 수 있다.

매니퓰레이션과 좌표 변환

CONCEPT 정의

매니퓰레이션(manipulation): 물체를 집어 이동하거나 공구로 작업하는 조작





[직관] 같은 목표점이라도 키 · 팔 길이 · 서 있는 위치에 따라 관절 각이 다르다.
로봇도 카메라로 측정한 위치를 로봇 기준 좌표로 변환해야 관절 각을 구할 수 있다.

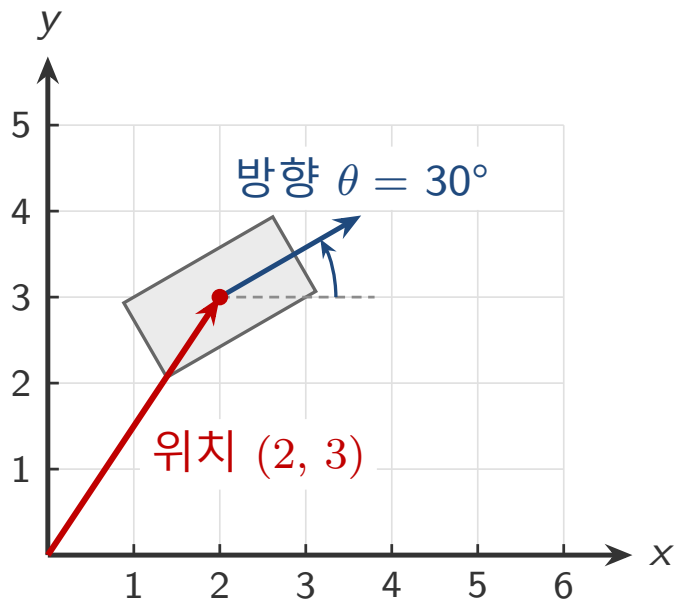
위치 · 방향 · 자세

CONCEPT 정의

위치(position): 기준 좌표계 원점에 대한 점의 좌표

방향(orientation): 기준 좌표계에 대한 물체의 회전 상태 (평면: 각 θ)

자세(pose) = 위치 + 방향



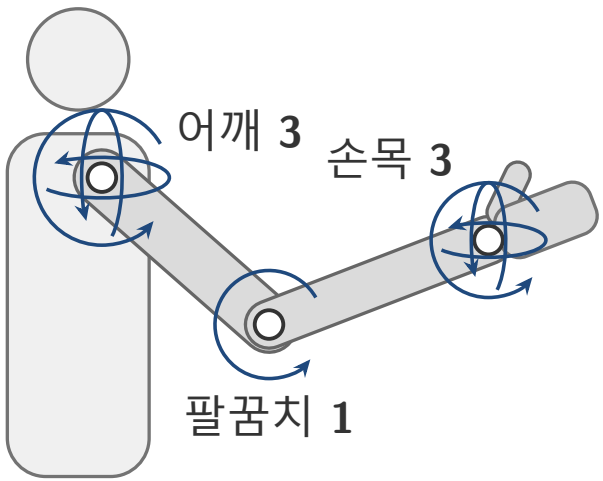
자유도 — 정의와 사람 팔 (1/2)

CONCEPT 정의

자유도(degree of freedom, DOF): 로봇의 형상을 결정하는 독립 변수의 수

회전 · 직동 관절은 자유도 1 ⇒ 직렬로 연결한 로봇팔은 자유도 = 관절 수

구면 관절(볼 조인트)은 자유도 3



▶ **어깨 + 팔꿈치 + 손목**

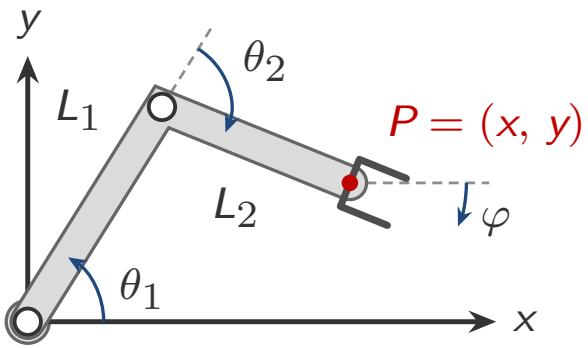
$$3 + 1 + 3 = 7$$

손목 3: 전완 회전 포함

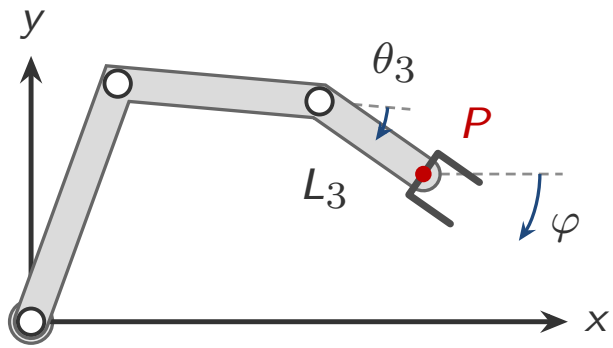
[직관] 사람 팔은 손가락을 빼면 **7자유도**다.

자유도 — 평면의 자세 변수 3개 (2/2)

평면에서 로봇팔의 자세 = 위치 (x, y) + 방향 φ



(a) θ_1, θ_2: 관절 변수 2개



(b) θ_3 추가: 관절 변수 3개 = 식 3개

위치 x: $x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$

위치 y: $y = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$

방향 φ: $\varphi = \theta_1 + \theta_2$ $\Rightarrow$ 임의의 (x, y, φ) 를 주면 일반적으로 해가 없다

[직관] (a) 는 x, y 를 지정하면 φ 를 따로 지정할 수 없다(팔꿈치 위 · 아래 두 해).
(b) 는 **θ_3 이 더해져 φ 까지 지정**할 수 있다.

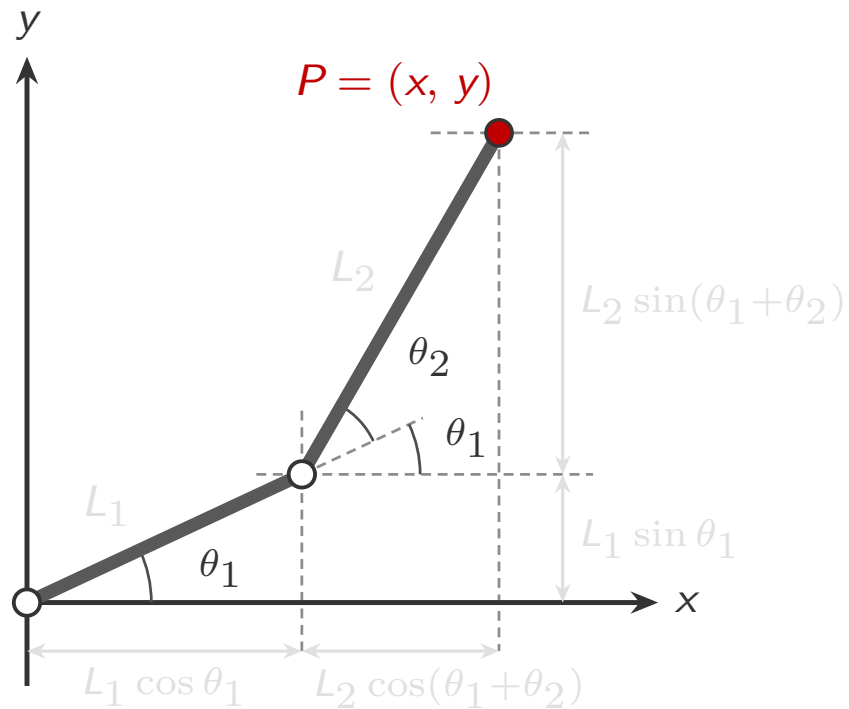
순기구학 — 각에서 위치로 (1/4)

순기구학(forward kinematics): 관절 각 (θ_1, θ_2) 로 위치 $P = (x, y)$ 를 구한다.

$$x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

θ_1, θ_2 가 주어지면 해는 하나

위치 $(x, y) \to$ 각 (θ_1, θ_2) 는?



[읽는 법] 두 링크를 각각 x 성분과 y 성분으로 나눠 더한다.

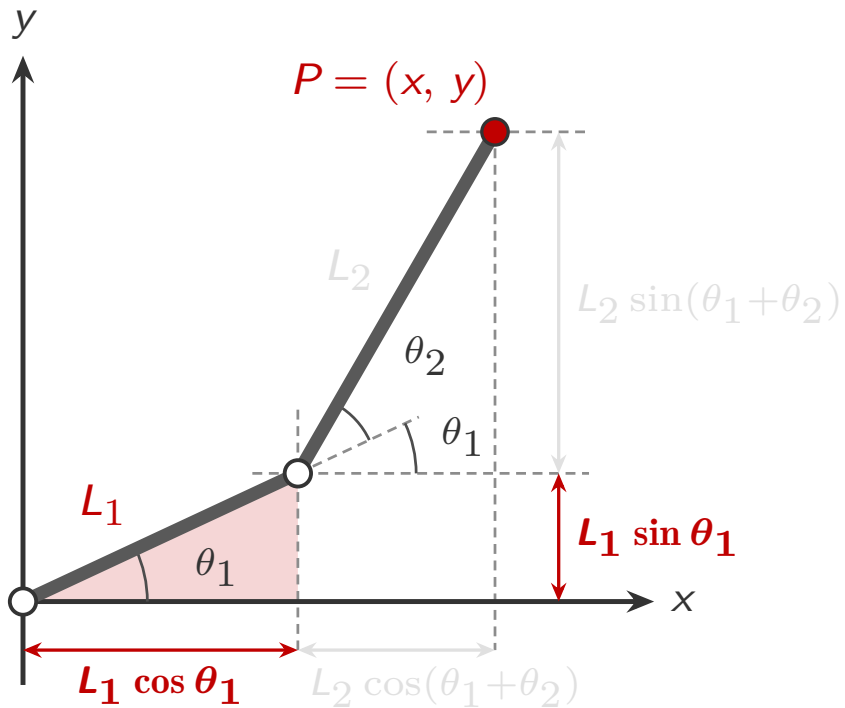
순기구학 — 각에서 위치로 (2/4)

순기구학(forward kinematics): 관절 각 (θ_1, θ_2) 로 위치 $P = (x, y)$ 를 구한다.

$$x = \boldsymbol{L_1 \cos \theta_1} + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = \boldsymbol{L_1 \sin \theta_1} + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

θ_1, θ_2 가 주어지면 해는 하나

위치 $(x, y) \to$ 각 (θ_1, θ_2) 는?



[읽는 법] 링크 1: 빗변 L_1, 각 θ_1 인 직각삼각형의 밑변과 높이

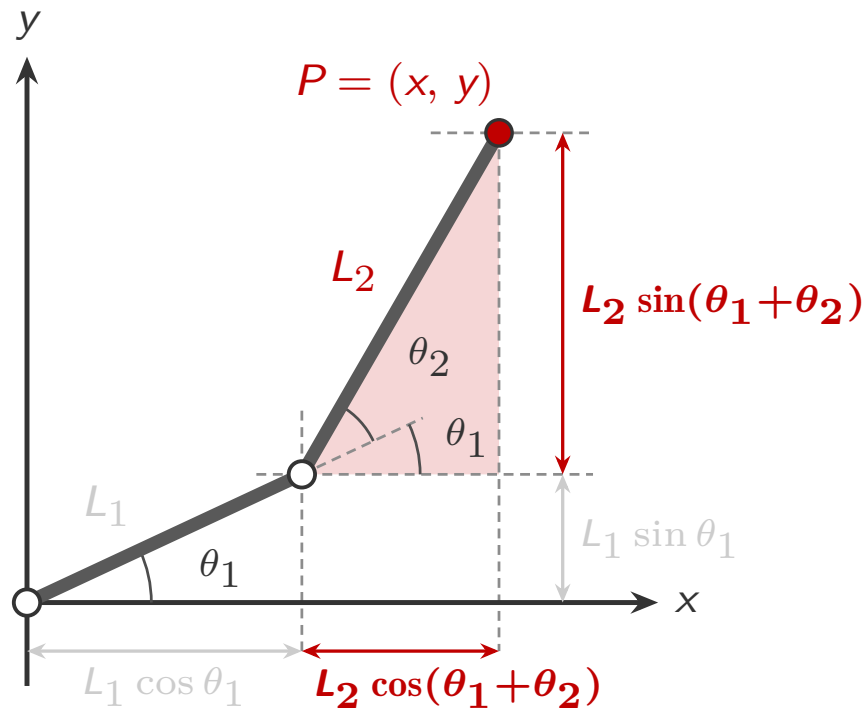
순기구학 — 각에서 위치로 (3/4)

순기구학(forward kinematics): 관절 각 (θ_1, θ_2) 로 위치 $P = (x, y)$ 를 구한다.

$$x = L_1 \cos\theta_1 + \boldsymbol{L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)}$$
$$y = L_1 \sin\theta_1 + \boldsymbol{L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

θ_1, θ_2 가 주어지면 해는 하나

위치 $(x, y) \to$ 각 (θ_1, θ_2) 는?



[읽는 법] 링크 2 의 각은 x축에서 잰 $\boldsymbol{\theta_1 + \theta_2}$ 다 (θ_2 는 링크 1 방향에서 잰 각).

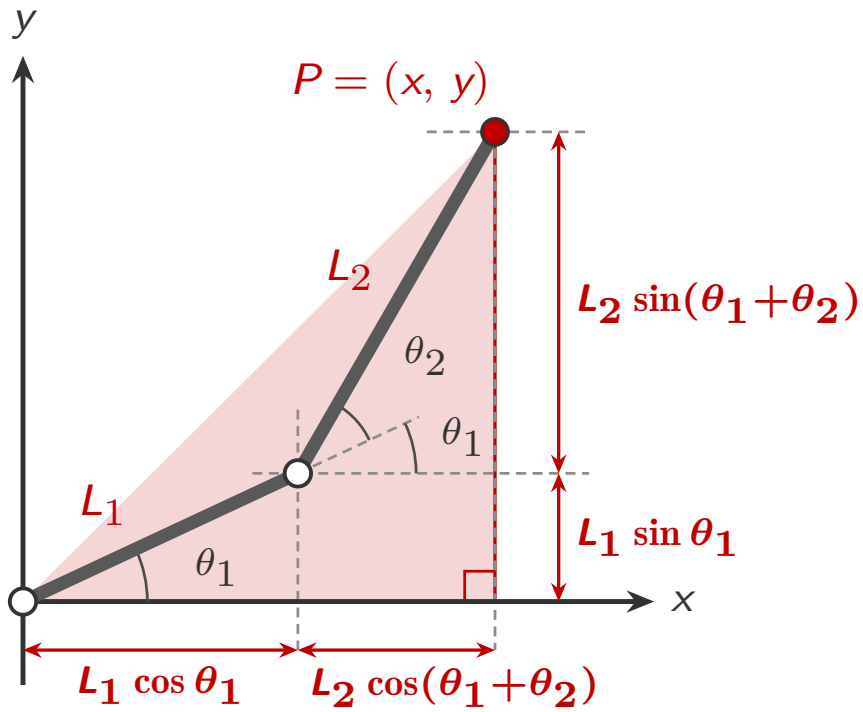
순기구학 — 각에서 위치로 (4/4)

순기구학(forward kinematics): 관절 각 (θ_1, θ_2) 로 위치 $P = (x, y)$ 를 구한다.

$$x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

θ_1, θ_2 가 주어지면 **해는 하나**

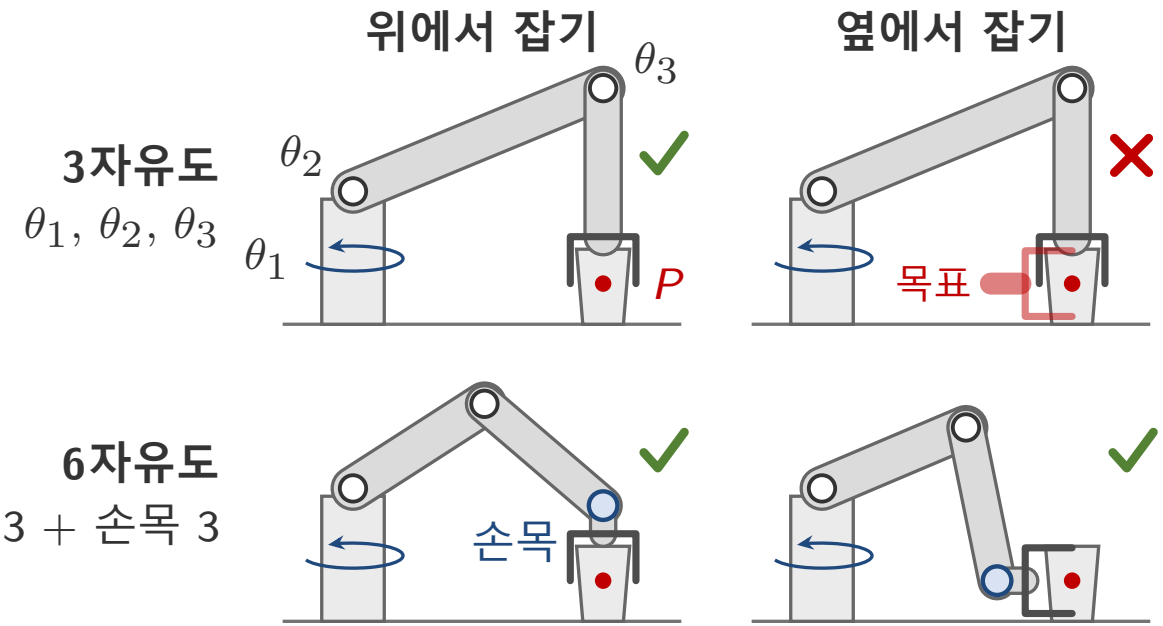
위치 $(x, y) \rightarrow$ 각 (θ_1, θ_2) 는?



[직관] 큰 직각삼각형의 밑변이 x, 높이가 y 다. 두 링크 성분의 합이다.

공간의 자유도 — 자세 변수 6개 (1/3)

공간의 자세: 위치 (x, y, z) 3개 + 방향 (roll, pitch, yaw: 세 축에 대한 회전각) 3개

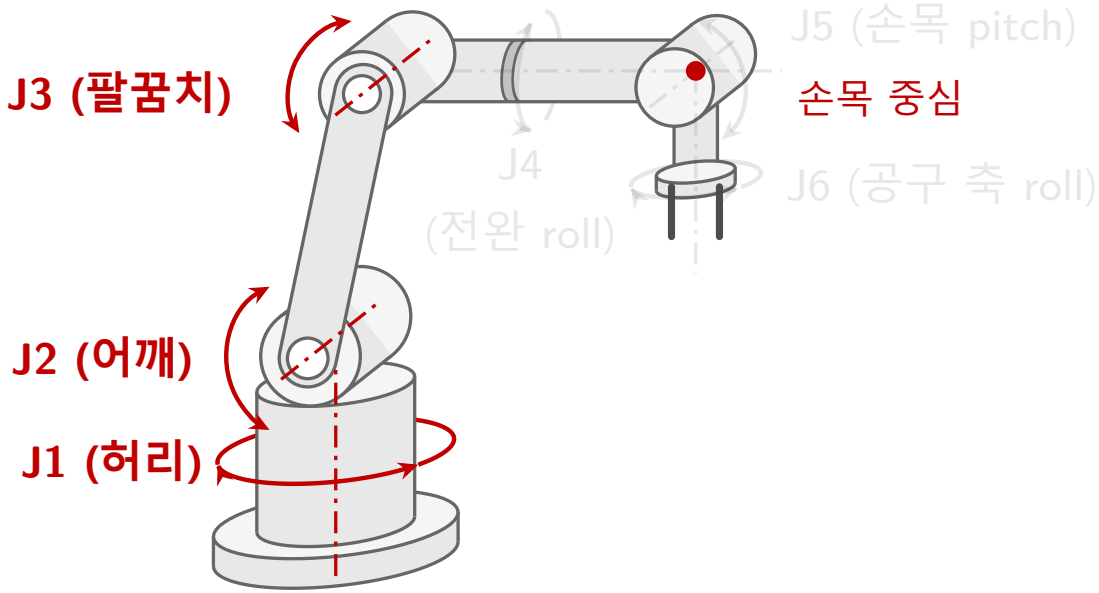


3자유도 로봇팔: 임의의 자세에는 일반적으로 해가 없다 (식 6개 > 관절 변수 3개)

[직관] 3자유도 로봇팔은 P 에 도달해도 **그리퍼 방향을 임의로 지정할 수 없다**.
손목(wrist): 그리퍼 방향을 정하는 마지막 회전 관절 3개 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$

공간의 자유도 — 6축 로봇의 팔 3 + 손목 3 (2/3)

6축 수직 다관절 로봇: 팔 3축(J1∼J3)과 손목 3축(J4∼J6)을 직렬로 연결한 로봇팔

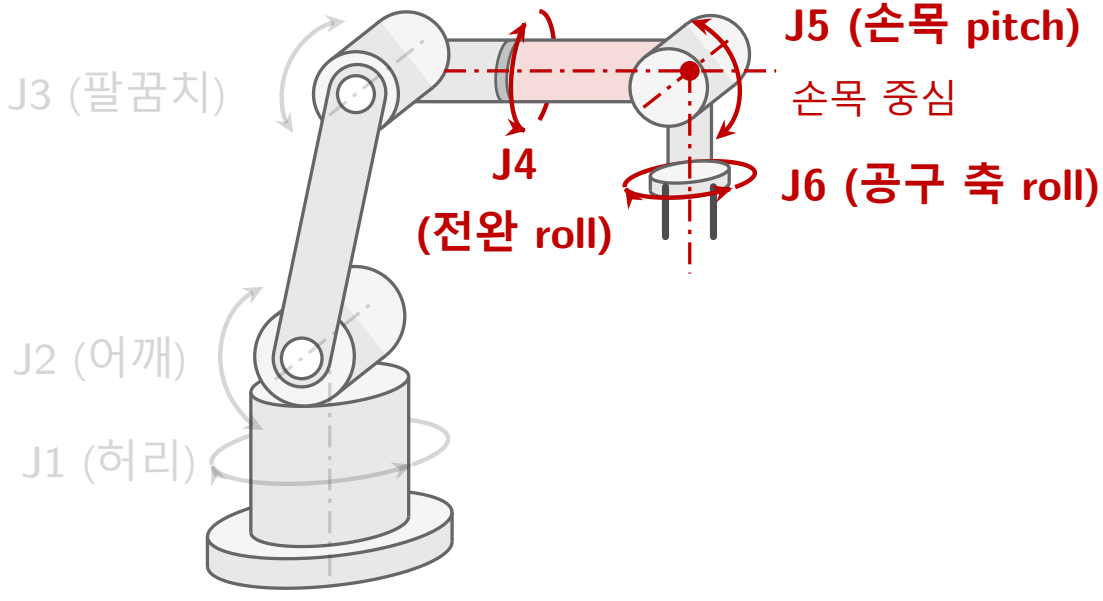


J1, J2, J3 → 손목 중심의 위치 3개 + J4, J5, J6 → 방향 3개

[직관] 이 로봇은 J4, J5, J6 의 회전축이 **손목 중심 한 점**에서 만난다.
손목이 회전해도 손목 중심은 움직이지 않아 그 위치는 J1∼J3 이 정한다.

공간의 자유도 — 6축 로봇의 팔 3 + 손목 3 (3/3)

6축 수직 다관절 로봇: 팔 3축(J1∼J3)과 손목 3축(J4∼J6)을 직렬로 연결한 로봇팔

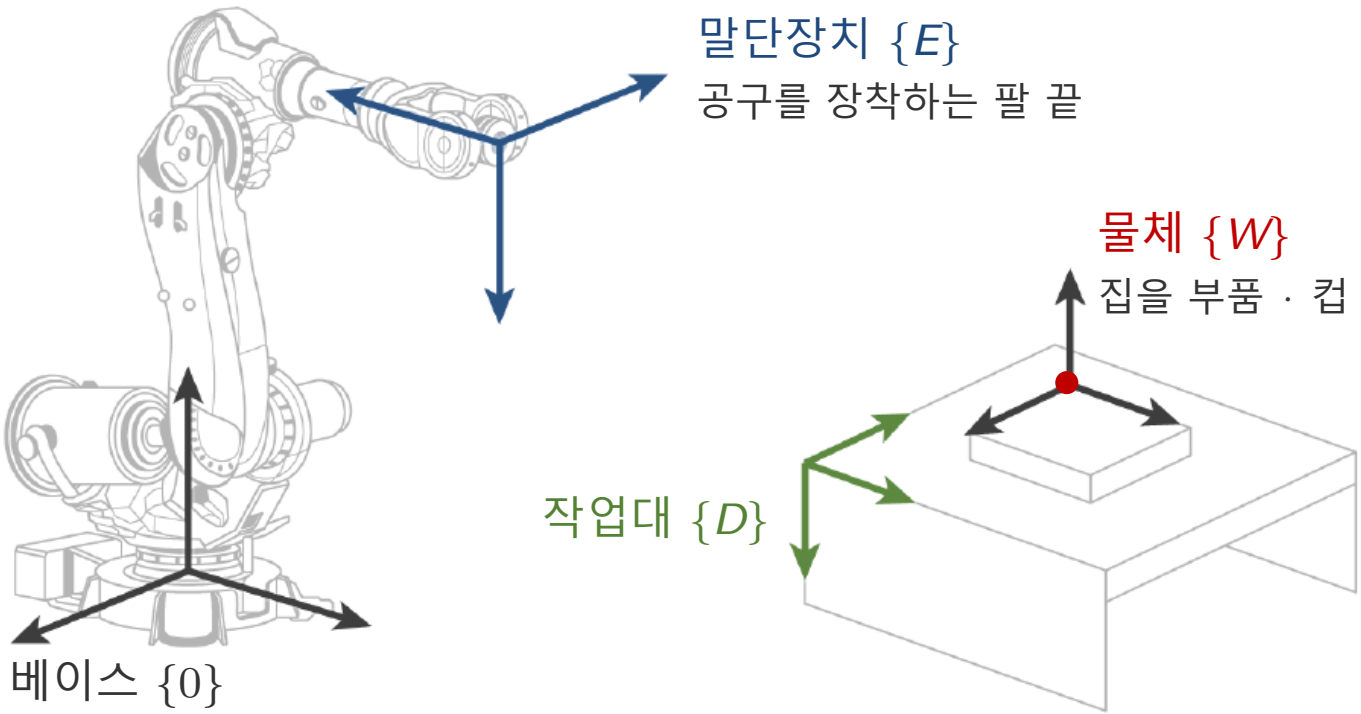


J1, J2, J3 → 손목 중심의 위치 3개 + **J4, J5, J6 → 방향 3개**

[직관] 공간에서 위치와 방향을 모두 지정하려면 관절 변수가 **6개 이상** 필요하다.
7자유도인 사람 팔은 손 자세를 고정해도 팔꿈치를 움직일 수 있다(여유자유도).

좌표계 — 작업 현장의 네 좌표계

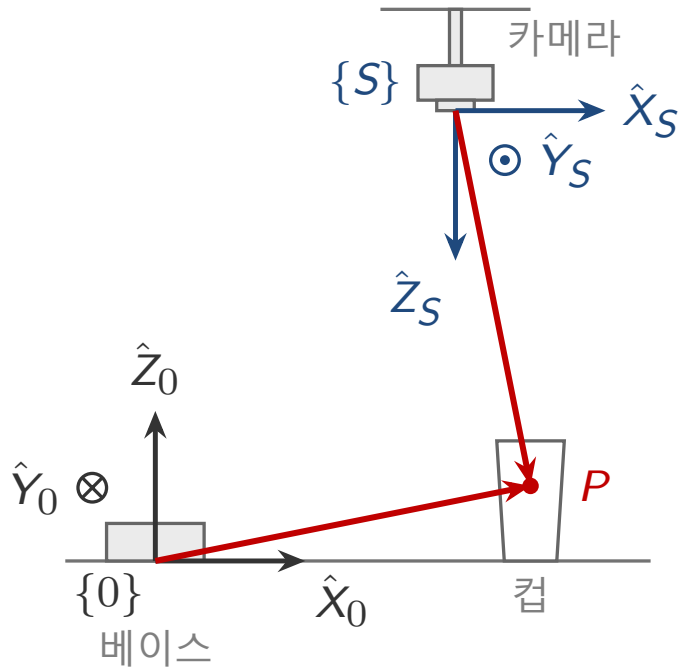
좌표계: 원점과 서로 수직인 세 좌표축. 이름은 중괄호 { } 로 표기한다.
작업 환경 전체의 기준이 되는 고정 좌표계를 **월드 좌표계** {*U*} 라 한다.



[읽는 법] 네 좌표계의 원점은 모두 다르고, 방향은 {0} 과 {*W*} 만 같다.

카메라 좌표와 베이스 좌표

같은 컵의 위치를 카메라 $\{S\}$ 와 베이스 $\{0\}$ 에서 각각 표현한다.



측면도 ($\otimes$ 화면 안으로, $\odot$ 화면 밖으로, Y 성분은 생략)

카메라 $\{S\}$ 기준 컵 위치

$$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \\ 0.5 \end{bmatrix} \text{m}$$

베이스 $\{0\}$ 기준 컵 위치

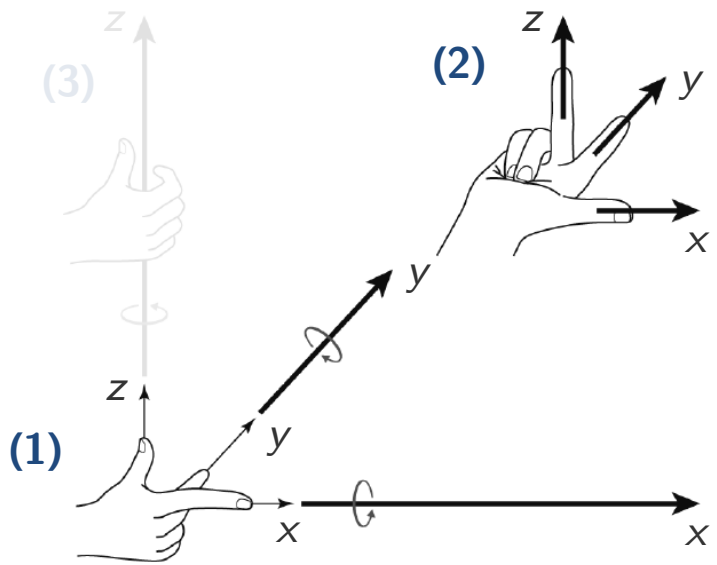
$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} \text{m}$$

[직관] 같은 컵이라도 기준 좌표계에 따라 좌표값이 다르다.
한 좌표계의 좌표로 다른 좌표계의 좌표를 구하는 것이 **좌표 변환**이다.

오른손 좌표계 — 세 축의 방향 (1/2)

CONCEPT 정의

오른손 좌표계: 네 손가락을 x 에서 y 로 감아쥐면 엄지가 z 방향 (그림 (1))

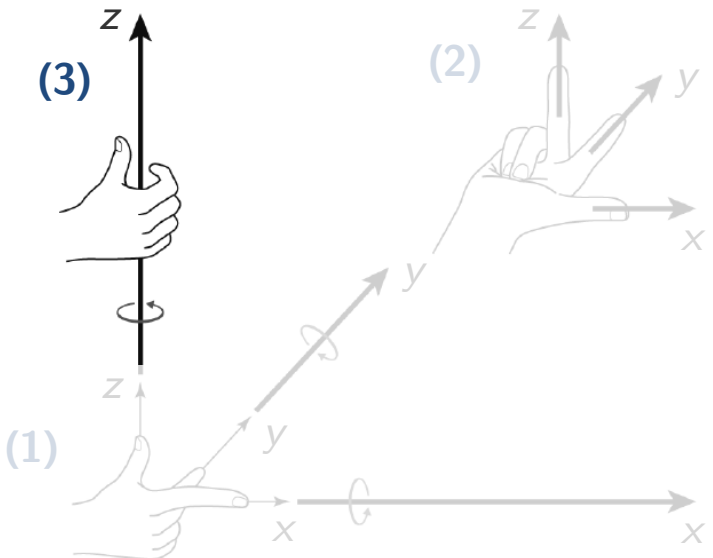


[직관] x축과 y축을 정하면 ***z*축 방향은 하나로** 정해진다 (그림 (1), (2)).
이 장의 좌표계는 모두 오른손 좌표계다.

오른손 좌표계 — 회전의 + 방향 (2/2)

CONCEPT 정의

회전의 + 방향: 엄지가 축의 + 방향일 때 네 손가락이 감기는 방향 (그림 (3))



[확인] 엄지를 $+z$ 방향으로 향하면 x축이 y축 위치로 회전한다.
z축에 대한 $+90°$ 회전: $(1,\ 0,\ 0) \to (0,\ 1,\ 0)$

위치벡터 — 좌상첨자는 기준 좌표계 (1/2)

RECALL 선형대수 4장

표준단위벡터로 성분 분해: $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$

CONCEPT 정의

$\hat{X}_A$, $\hat{Y}_A$, $\hat{Z}_A$: $\{A\}$ 의 세 축 방향 **단위벡터**(크기 1, ˆ 로 표기)

위치벡터 ${}^A\mathbf{P}$: $\{A\}$ 원점에서 점 P 까지의 벡터

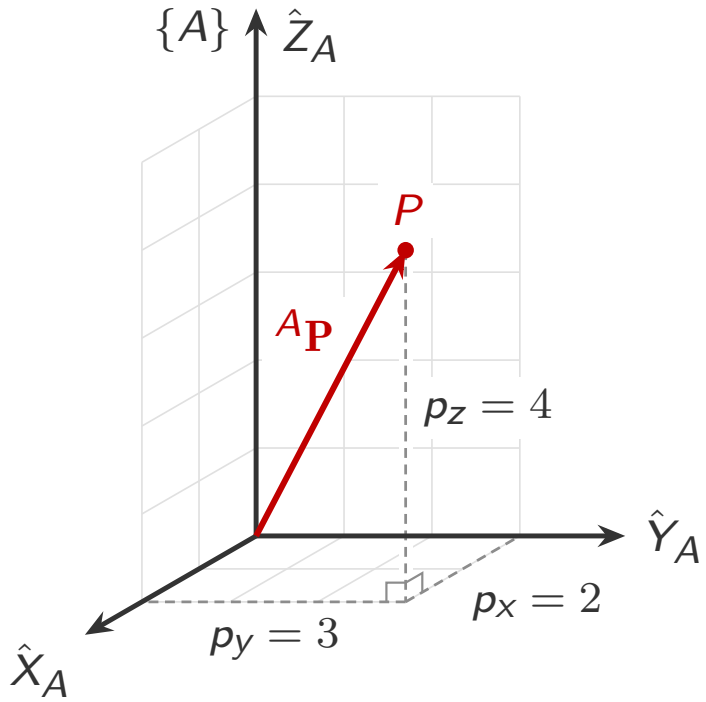
${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$: $\{A\}$ 원점에서 $\{B\}$ 원점까지의 위치벡터 (org = origin)

$$\boxed{{}^A\mathbf{P} = p_x\,\hat{X}_A + p_y\,\hat{Y}_A + p_z\,\hat{Z}_A = (p_x,\ p_y,\ p_z)} \qquad (3.1)$$



위치벡터 — 공간의 점으로 보기 (2/2)

(3.1) ${}^{A}\mathbf{P} = p_x\,\hat{X}_A + p_y\,\hat{Y}_A + p_z\,\hat{Z}_A$ 는 세 축 방향 성분의 합이다.



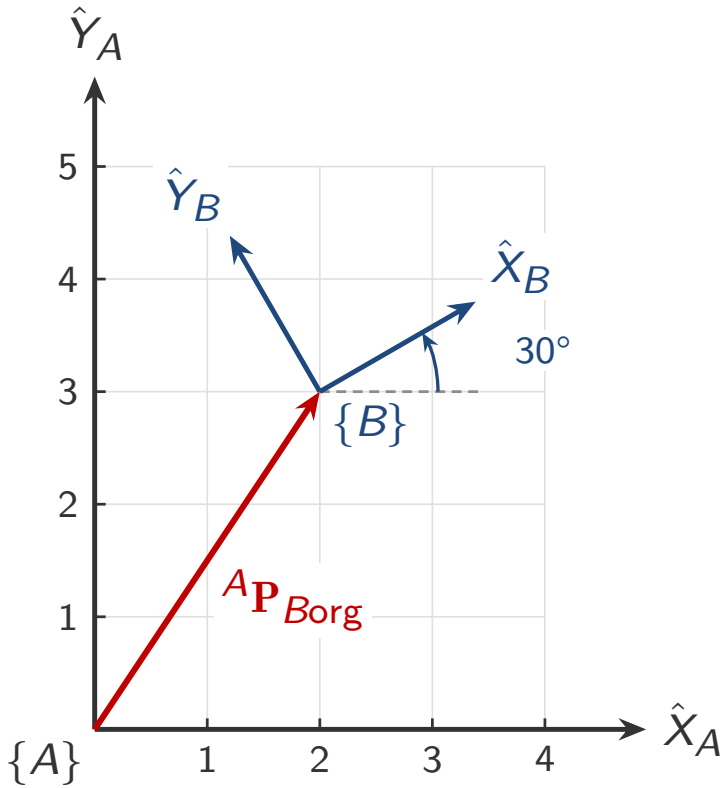
▶ **수치 예**

$$
\begin{aligned}
{}^{A}\mathbf{P} &= 2\,\hat{X}_A + 3\,\hat{Y}_A + 4\,\hat{Z}_A \\
&= (2,\ 3,\ 4)
\end{aligned}
$$

[읽는 법] $\{A\}$ 에서 표현하면 $\hat{X}_A = (1,\ 0,\ 0)$, $\hat{Y}_A = (0,\ 1,\ 0)$, $\hat{Z}_A = (0,\ 0,\ 1)$.
그래서 계수 2, 3, 4 가 곧 좌표값이다.

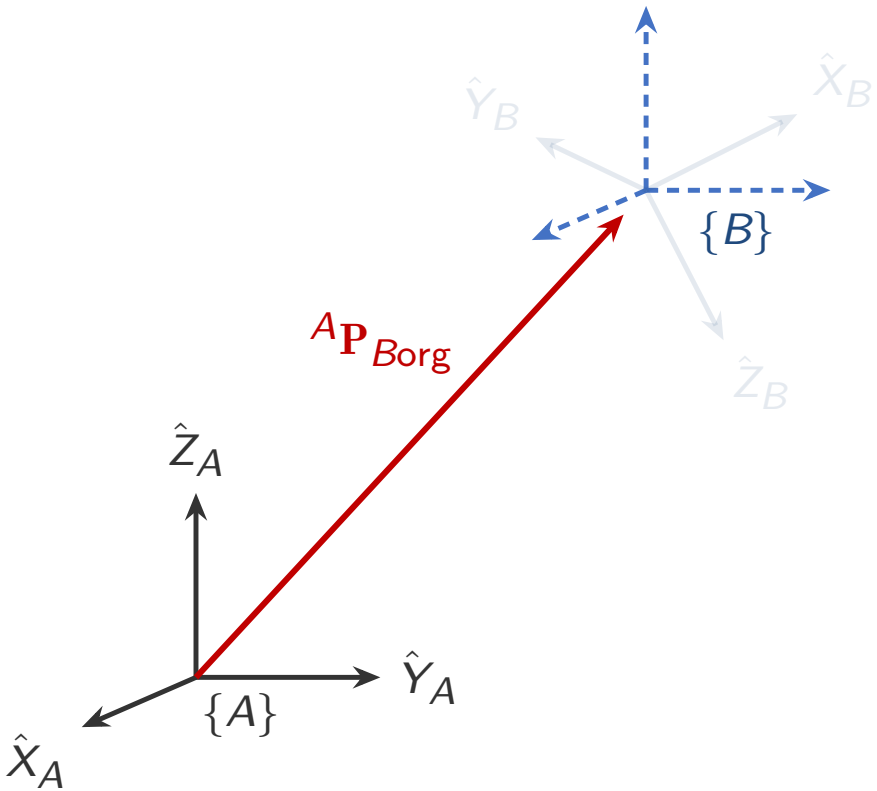
다른 좌표계의 원점 — 이 장의 $\{B\}$

이 장에서 자주 쓰는 $\{B\}$: 원점 ${}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} = (2,\ 3)$, 방향은 $\hat{Z}_A$ 에 대해 30° 회전.



[표기] 원점과 방향을 묶어 평면 자세 $(x,\ y,\ \theta) = (2,\ 3,\ 30^\circ)$ 로 쓴다.

좌표계의 자세 — 원점이 같은 두 $\{B\}$ (1/2)



▶ $\{B\}$ 를 설정하는 순서

(1) 회전 없이 ${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 만큼 이동한다

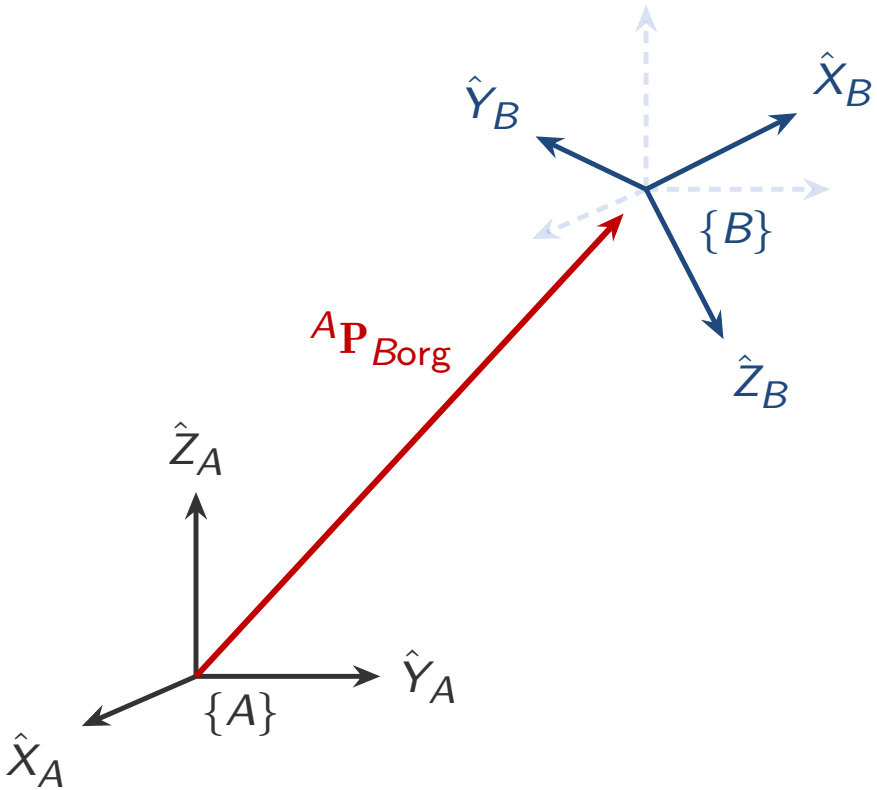
(2) 이동한 원점에서 회전한다

▶ 서로 다른 좌표계

원점 위치 ${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 는 같고 방향이 다르다.

[읽는 법] 점선 축: 원점만 ${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 만큼 이동해 방향은 $\{A\}$ 와 같다.

좌표계의 자세 — 원점이 같은 두 $\{B\}$ (2/2)



▶ $\{B\}$ 를 설정하는 순서

(1) 회전 없이 ${}^A\mathbf{P}_{Borg}$ 만큼 이동한다

(2) **이동한 원점에서 회전한다**

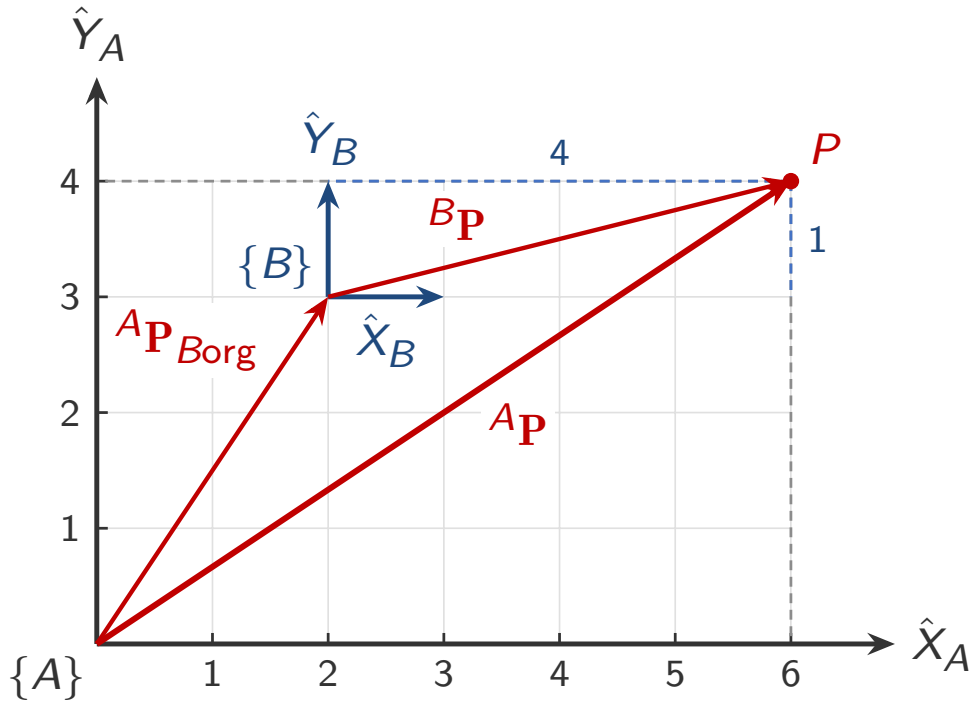
▶ **서로 다른 좌표계**

원점 위치 ${}^A\mathbf{P}_{Borg}$ 는 같고 방향이 다르다.

[직관] 좌표계를 정하려면 원점 위치와 방향이 **둘 다** 필요하다.

병진

병진(translation): 회전 없이 모든 점이 같은 변위만큼 이동하는 운동.



두 좌표계의 축 방향이 같으면

$$\boxed{{}^A\mathbf{P} = {}^B\mathbf{P} + {}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}} \qquad (3.2)$$

▶ **수치 예**

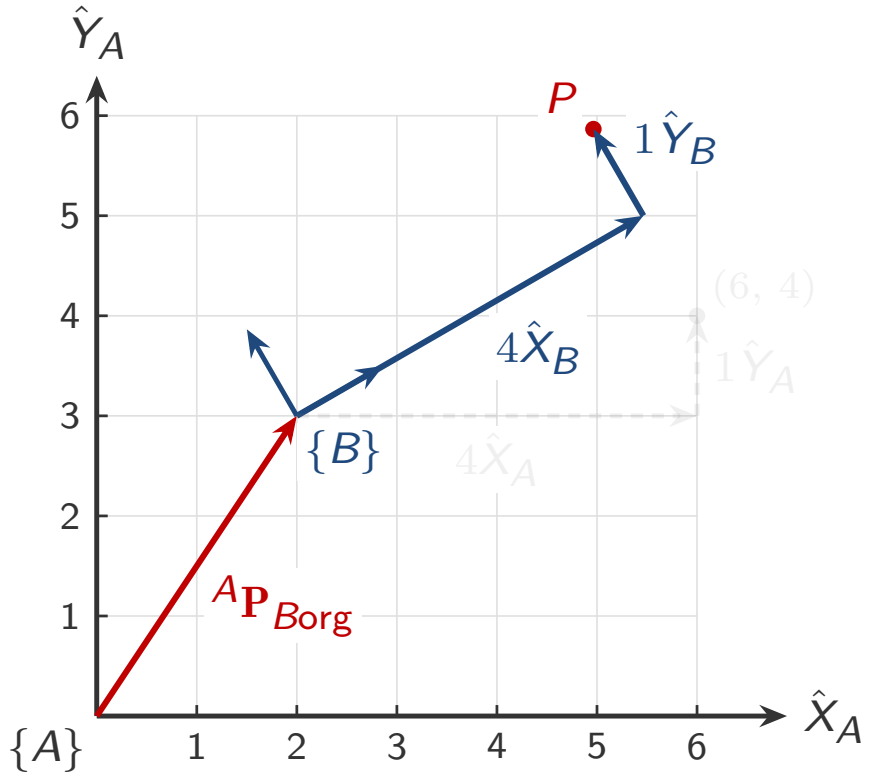
$${}^A\mathbf{P} = (4,\ 1) + (2,\ 3) = (6,\ 4)$$

$\{B\}$ 성분 4, 1 이 $\{A\}$ 에서도 4, 1 이다 (파란 점선).

[주의] (3.2) 가 모든 점에서 성립하는 것은 **축 방향이 같을 때뿐**이다.

방향이 다를 때 — 단순 덧셈의 결과 (1/2)

$30°$ 회전한 $\{B\}$ 에서 ${}^{B}\mathbf{P} = (4,\ 1)$: $\hat{X}_B$ 방향으로 4, $\hat{Y}_B$ 방향으로 1 이동한 점.



(1) $\{B\}$ **축 방향으로 4, 1**

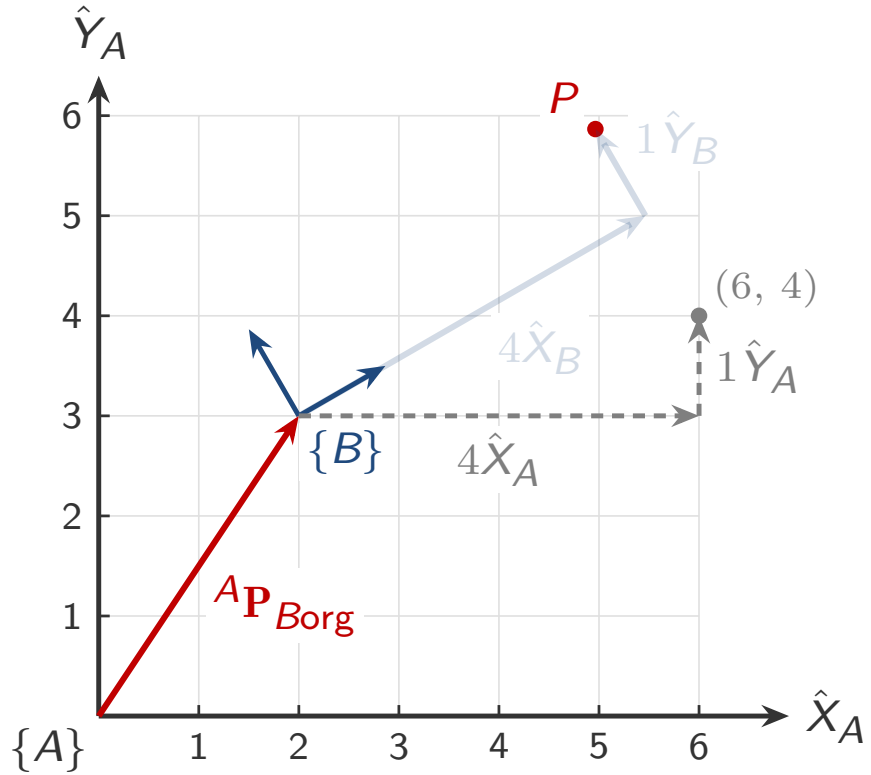
(2) $\{A\}$ 축 방향으로 4, 1

$(4,\ 1) + (2,\ 3) = (6,\ 4)$

[읽는 법] 파란 화살표처럼 $\{B\}$ 의 축을 따라 4, 1 만큼 이동한 끝점이 실제 점 P 다.

방향이 다를 때 — 단순 덧셈의 결과 (2/2)

$30°$ 회전한 $\{B\}$ 에서 ${}^{B}\mathbf{P} = (4,\ 1)$: $\hat{X}_B$ 방향으로 4, $\hat{Y}_B$ 방향으로 1 이동한 점.



(1) $\{B\}$ 축 방향으로 4, 1

(2) $\{A\}$ **축 방향으로 4, 1**

$$(4,\ 1) + (2,\ 3) = (6,\ 4)$$

[주의] $\{B\}$ 기준 좌표는 $\{A\}$ **의 축 성분으로 변환해야** 더할 수 있다.

Chapter 3. 위치와 방향

3.1 좌표계와 위치

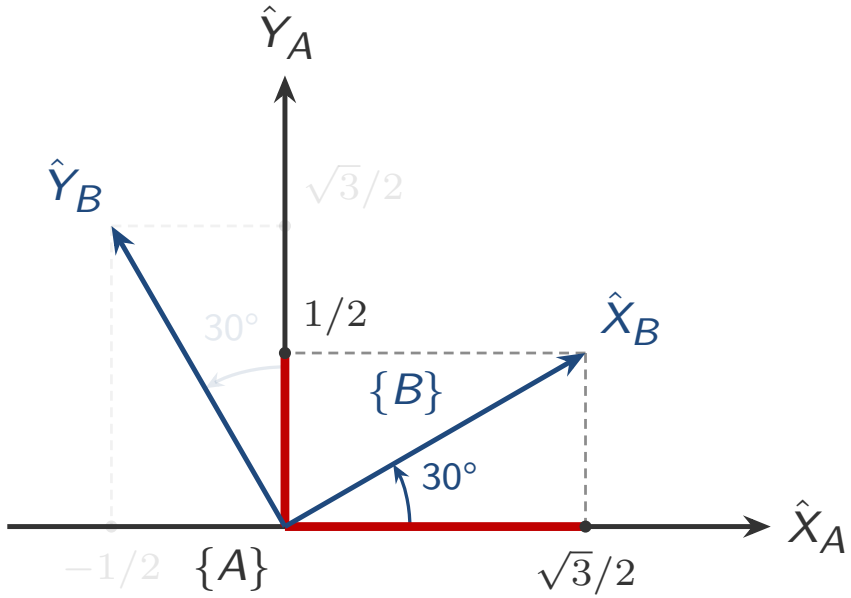
3.2 회전행렬

[왜 필요한가] 회전한 좌표계에서 표현한 좌표는 그대로 더할 수 없다(3.1절의 $(6,\ 4)$).
회전한 축의 좌표를 기준 축의 좌표로 변환하는 행렬이 필요하다.

$\{A\}$ 에서 표현한 $\{B\}$ 의 축 — 평면 $30°$ (1/2)

CONCEPT 표기

${}^{A}\hat{X}_B$: $\{A\}$ 에서 표현한 $\{B\}$ 의 축 $\hat{X}_B$ (좌상첨자 = 기준 좌표계)



$\{B\}$: $\{A\}$ 와 원점이 같고
$\hat{Z}_A$ 에 대해 $30°$ 회전한 좌표계

$$ {}^{A}\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} $$

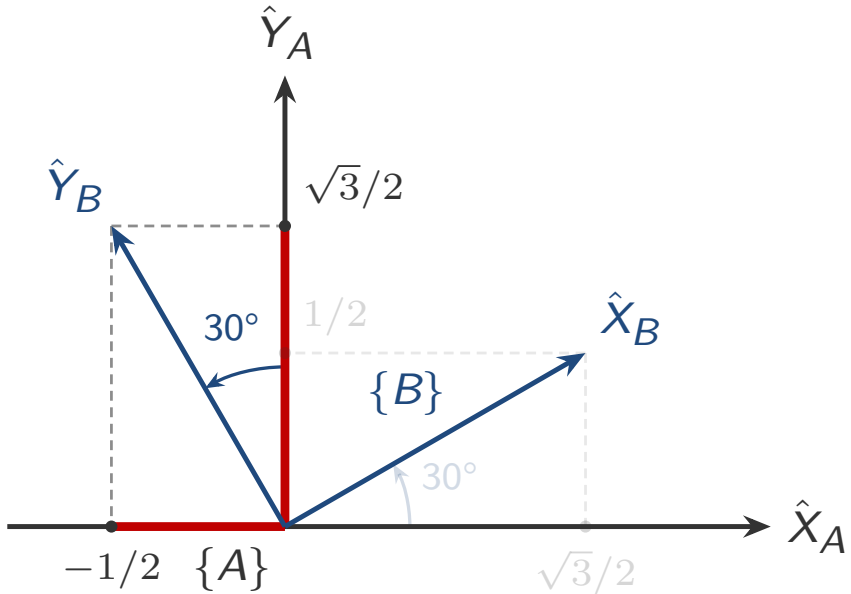
$$ {}^{A}\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} -\sin 30° \\ \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} $$

[읽는 법] 원점에서 수선의 발까지(빨간 선분)가 $\hat{X}_B$ 의 $\{A\}$ 성분이다.

$\{A\}$ 에서 표현한 $\{B\}$ 의 축 — 평면 $30°$ (2/2)

CONCEPT 표기

${}^{A}\hat{X}_B$: $\{A\}$ 에서 표현한 $\{B\}$ 의 축 $\hat{X}_B$ (좌상첨자 $=$ 기준 좌표계)



$\{B\}$: $\{A\}$ 와 원점이 같고
$\hat{Z}_A$ 에 대해 $30°$ 회전한 좌표계

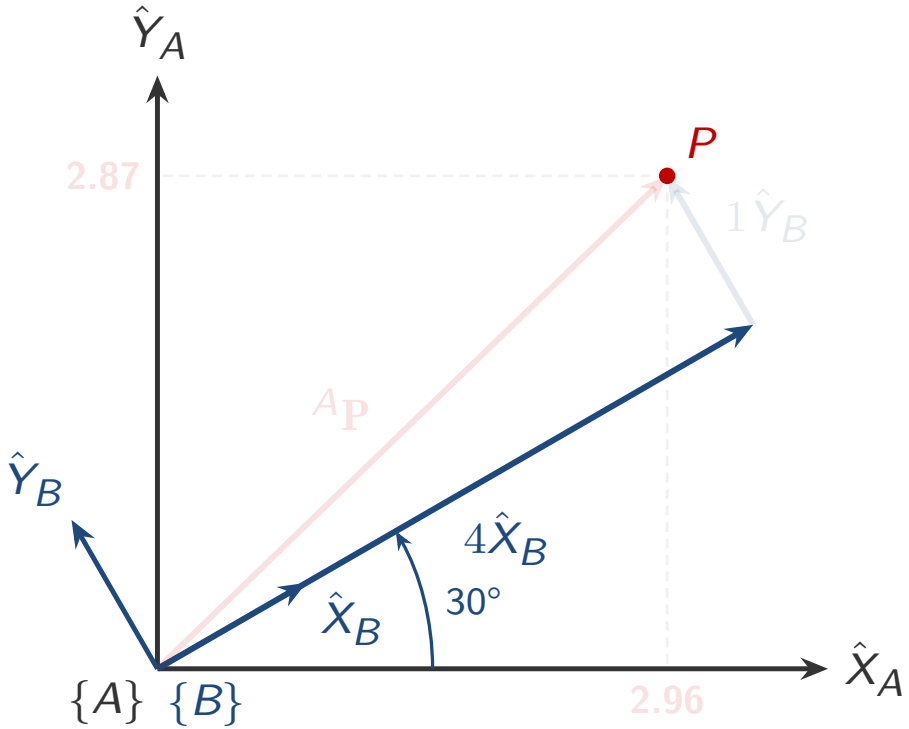
$$ {}^{A}\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} -\sin 30° \\ \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} $$

[읽는 법] $\hat{Y}_B$ 는 $\hat{Y}_A$ 에서 $30°$ 기울어 X 성분이 음수 $-\sin 30° = -1/2$ 이다.

$\{B\}$ 의 좌표를 $\{A\}$ 의 좌표로 — ${}^{B}\mathbf{P} = (4,\ 1)$ (1/3)

원점이 같은 $\{B\}$ 에서 ${}^{B}\mathbf{P} = (4,\ 1)$ 인 점 P.

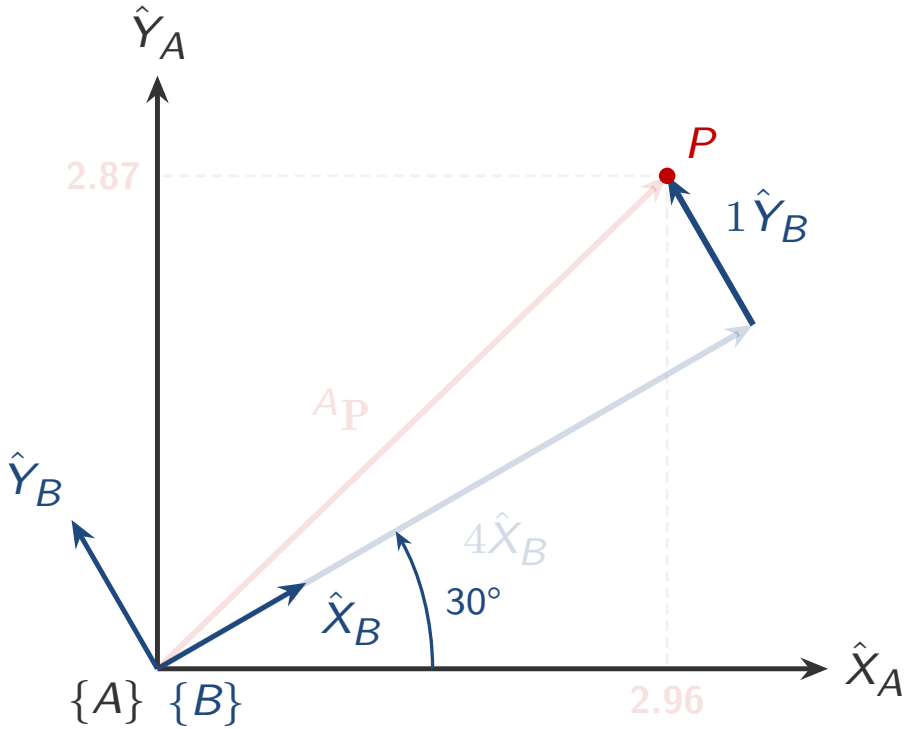


$$
\begin{aligned}
{}^{A}\mathbf{P} &= 4\,{}^{A}\hat{X}_B + 1\,{}^{A}\hat{Y}_B \\
&= 4\begin{bmatrix}\cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}4\cos 30^\circ - \sin 30^\circ \\ 4\sin 30^\circ + \cos 30^\circ\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}2.96 \\ 2.87\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

[읽는 법] $\hat{X}_B$ 방향으로 4 이동: $4\,{}^{A}\hat{X}_B = 4\,(\cos 30^\circ,\ \sin 30^\circ)$

$\{B\}$ 의 좌표를 $\{A\}$ 의 좌표로 — ${}^{B}\mathbf{P} = (4,\ 1)$ (2/3)

원점이 같은 $\{B\}$ 에서 ${}^{B}\mathbf{P} = (4,\ 1)$ 인 점 P.

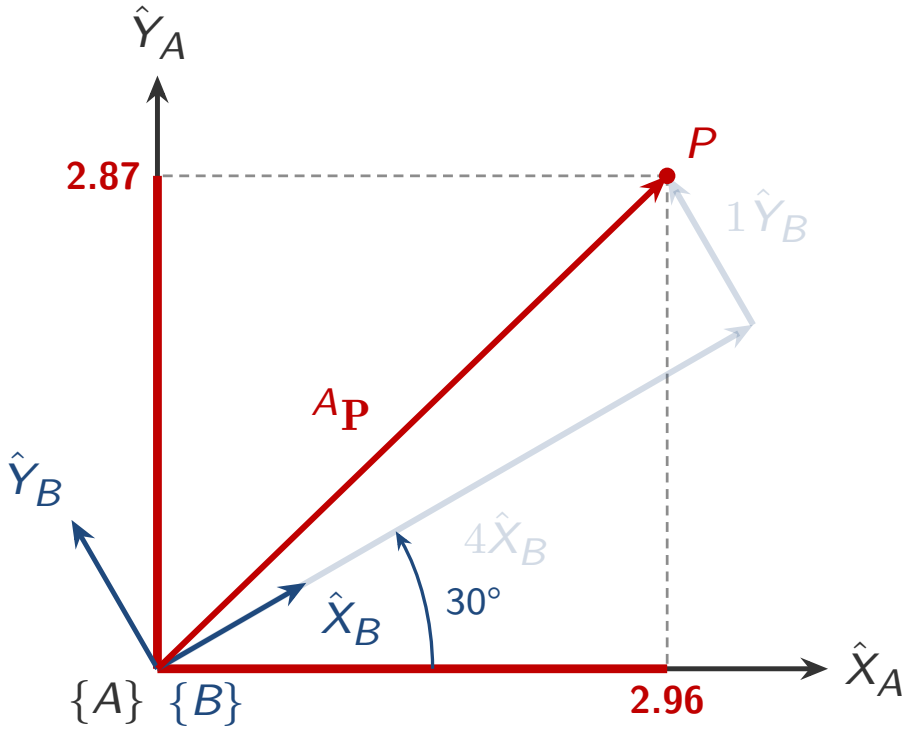


$$
\begin{aligned}
{}^{A}\mathbf{P} &= 4\,{}^{A}\hat{X}_B + 1\,{}^{A}\hat{Y}_B \\
&= 4\begin{bmatrix}\cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}4\cos 30^\circ - \sin 30^\circ \\ 4\sin 30^\circ + \cos 30^\circ\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}2.96 \\ 2.87\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

[읽는 법] 이어서 $\hat{Y}_B$ 방향으로 1 이동: $1\ {}^{A}\hat{Y}_B = (-\sin 30^\circ,\ \cos 30^\circ)$

$\{B\}$ 의 좌표를 $\{A\}$ 의 좌표로 — ${}^{B}\mathbf{P} = (4,\ 1)$ (3/3)

원점이 같은 $\{B\}$ 에서 ${}^{B}\mathbf{P} = (4,\ 1)$ 인 점 P.



$$
\begin{aligned}
{}^{A}\mathbf{P} &= 4\,{}^{A}\hat{X}_B + 1\,{}^{A}\hat{Y}_B \\
&= 4\begin{bmatrix}\cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}4\cos 30^\circ - \sin 30^\circ \\ 4\sin 30^\circ + \cos 30^\circ\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}\mathbf{2.96} \\ \mathbf{2.87}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

[확인] 크기가 같다: $\|{}^{B}\mathbf{P}\|^2 = \|{}^{A}\mathbf{P}\|^2 = 4^2 + 1^2 = 17.$

회전행렬 — 왜 열벡터인가 (1/2)

CONCEPT 정의

회전행렬(rotation matrix): $\{A\}$ 에서 표현한 $\{B\}$ 의 축을 열벡터로 하는 행렬

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} \qquad (\text{평면은 } \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B \end{bmatrix}) \quad (3.3) $$

RECALL 선형대수 2장

행렬의 곱: $\mathbf{AB}$ 의 (i,j) 성분 $=$ $\mathbf{A}$ 의 i 행과 $\mathbf{B}$ 의 j 열을 곱해 더한 값

▶ 2×2 곱을 풀어 쓰면

$$ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} $$



꼬리 A: 기준, 머리 B: 대상

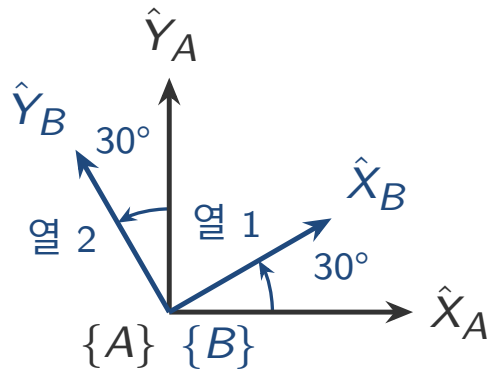
[직관] 열이 $\{B\}$ 의 축이면 곱은 $x\,{}^{A}\hat{X}_B + y\,{}^{A}\hat{Y}_B$

회전행렬 — 열의 합으로 보기 (2/2)

$$ {}^{A}\mathbf{P} = 4\,{}^{A}\hat{X}_B + 1\,{}^{A}\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} $$

평면에서 θ 회전: $ {}^{A}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} $

$$ \theta = 30^\circ: \quad {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cos 30^\circ - \sin 30^\circ \\ 4\sin 30^\circ + \cos 30^\circ \end{bmatrix} $$



$$ \boxed{ {}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} } \qquad (3.4) $$

원점이 같을 때

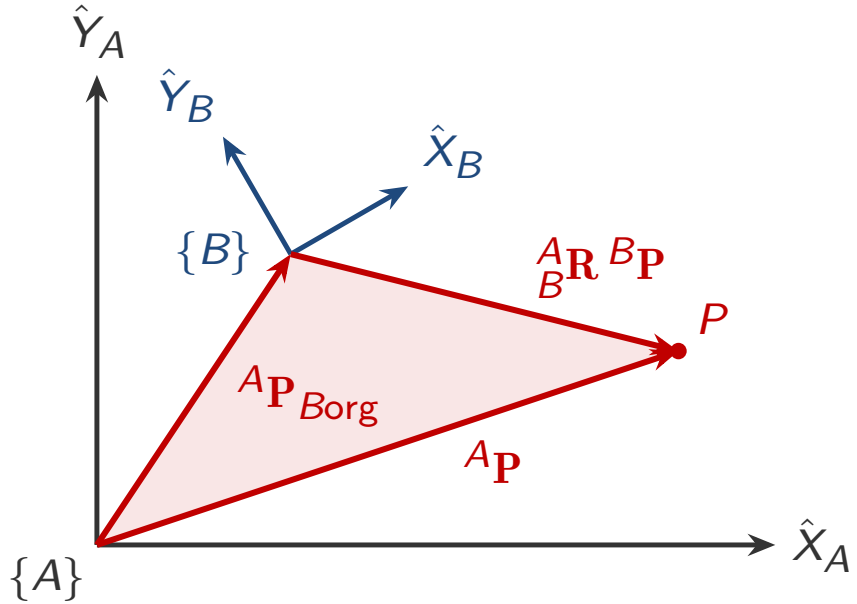
[읽는 법] ${}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P}$ 에서 가운데 첨자 B 가 상쇄되고 A 가 남는다.

좌표 변환 — 세 가지 경우 (1/5)

$\{A\}$ 원점에서 P 까지 $=$ $\{B\}$ 원점까지 $+$ $\{B\}$ 원점에서 P 까지 (P 는 임의의 점)

- **경우 1 원점 · 방향 다름**

$$\boxed{{}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{Borg}} \quad (3.5)$$



- **경우 2 방향 같음:** ${}^{A}_{B}\mathbf{R} =$ 단위행렬 $\mathbf{I}_3$

$${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{Borg} \quad (3.2)$$

- **경우 3 원점 같음:** ${}^{A}\mathbf{P}_{Borg} = \mathbf{0}$

$${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} \quad (3.4)$$

[직관] 곱은 축 방향의 차이를, 합은 원점의 차이를 반영한다.

좌표 변환 — 세 가지 경우 (2/5)

$\{A\}$ 원점에서 P 까지 $=\{B\}$ 원점까지 $+\{B\}$ 원점에서 P 까지 (P 는 임의의 점)

- **경우 1 원점 · 방향 다름**

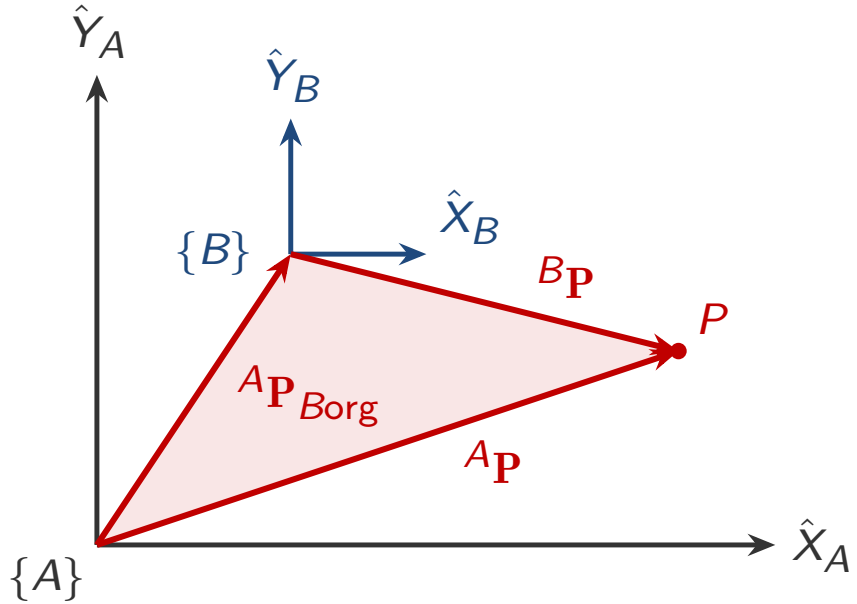
$$\boxed{{}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{Borg}} \quad (3.5)$$

- **경우 2 방향 같음: ${}^{A}_{B}\mathbf{R} =$ 단위행렬 $\mathbf{I}_3$**

$${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{Borg} \quad (3.2)$$

- 경우 3 원점 같음: ${}^{A}\mathbf{P}_{Borg} = \mathbf{0}$

$${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} \quad (3.4)$$



[직관] 곱은 축 방향의 차이를, 합은 원점의 차이를 반영한다.

좌표 변환 — 세 가지 경우 (3/5)

$\{A\}$ 원점에서 P 까지 $=$ $\{B\}$ 원점까지 $+$ $\{B\}$ 원점에서 P 까지 (P 는 임의의 점)

- **경우 1 원점 · 방향 다름**

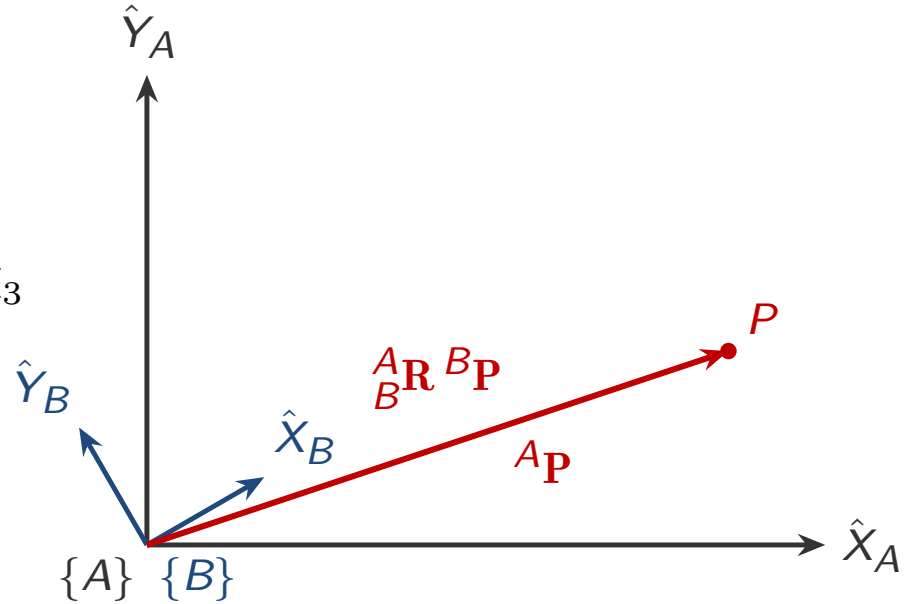
$$\boxed{{}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}} \quad (3.5)$$

- **경우 2 방향 같음: ${}^{A}_{B}\mathbf{R} =$ 단위행렬 $\mathbf{I}_3$**

$${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} \quad (3.2)$$

- **경우 3 원점 같음: ${}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} = \mathbf{0}$**

$${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} \quad (3.4)$$



[직관] 곱은 축 방향의 차이를, 합은 원점의 차이를 반영한다.

좌표 변환 — 회전 후 병진 (4/5)

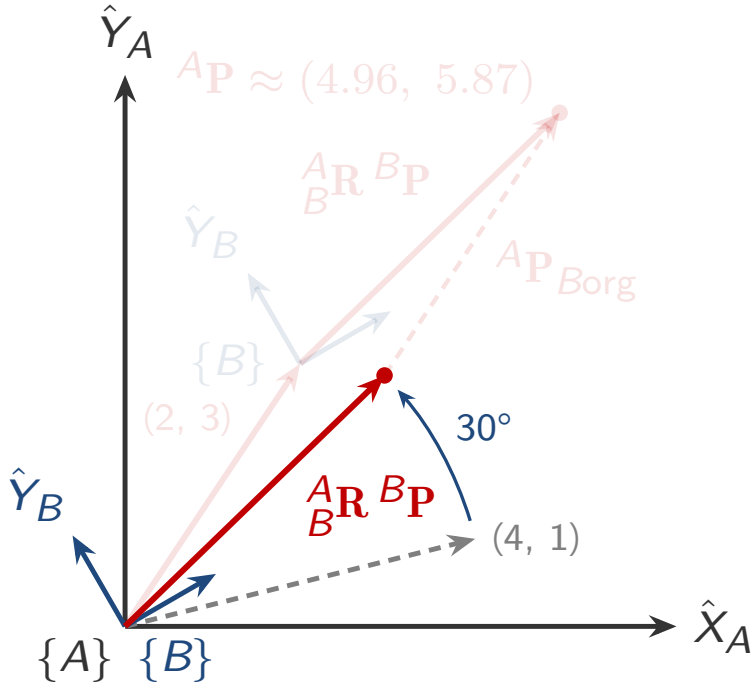
$\{B\}$: 원점 $(2,\ 3)$, $\hat{Z}_A$ 에 대해 $30°$ 회전. 점: ${}^{B}\mathbf{P} = (4,\ 1)$.
(3.5) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 를 회전, 병진 두 단계로 계산한다.

▶ **(1) 회전: ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ 을 곱한다**

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4\cos 30° - \sin 30° \\ 4\sin 30° + \cos 30° \end{bmatrix} $$

▶ **(2) 병진: ${}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 를 더한다**

$$ {}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.96 \\ 5.87 \end{bmatrix} $$



[읽는 법] 원점에 둔 $\{B\}$ 와 함께 $(4,\ 1)$ 이 $30°$ 회전해 ${}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P}$ 가 된다(크기 그대로).
좌표계를 설정하는 순서(이동 → 회전)와 반대 순서지만 결과는 같다.

좌표 변환 — 회전 후 병진 (5/5)

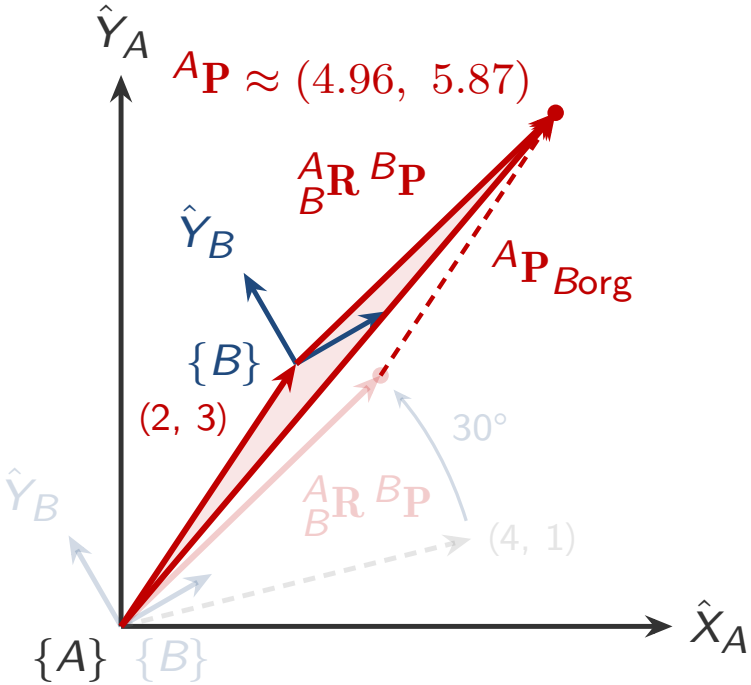
$\{B\}$: 원점 $(2,\ 3)$, $\hat{Z}_A$ 에 대해 30° 회전. 점: ${}^{B}\mathbf{P} = (4,\ 1)$.
(3.5) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 를 회전, 병진 두 단계로 계산한다.

▶ **(1) 회전: ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ 을 곱한다**

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4\cos 30^\circ - \sin 30^\circ \\ 4\sin 30^\circ + \cos 30^\circ \end{bmatrix} $$

▶ **(2) 병진: ${}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 를 더한다**

$$ {}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} + \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{4.96} \\ \mathbf{5.87} \end{bmatrix} $$



[읽는 법] 회전한 $\{B\}$ 와 점을 모두 ${}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} = (2,\ 3)$ 만큼 이동(병진)한 결과가 P 이다.
단순히 더하면 $(6,\ 4)$, 실제 ${}^{A}\mathbf{P} \approx (4.96,\ 5.87)$ 이다.

방향코사인 — 두 축의 내적 (1/5)

RECALL 선형대수 4장

영 아닌 두 벡터의 내적: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$
$\|\mathbf{u}\| = 1$ 이면 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 는 $\mathbf{v}$ 의 $\mathbf{u}$ 방향 성분(정사영의 부호 있는 길이)이다.

CONCEPT 정의

방향코사인(direction cosine): 두 축이 이루는 사잇각의 cos

회전행렬의 원소 r_{ij}(i 행 j 열)는 방향코사인이다.

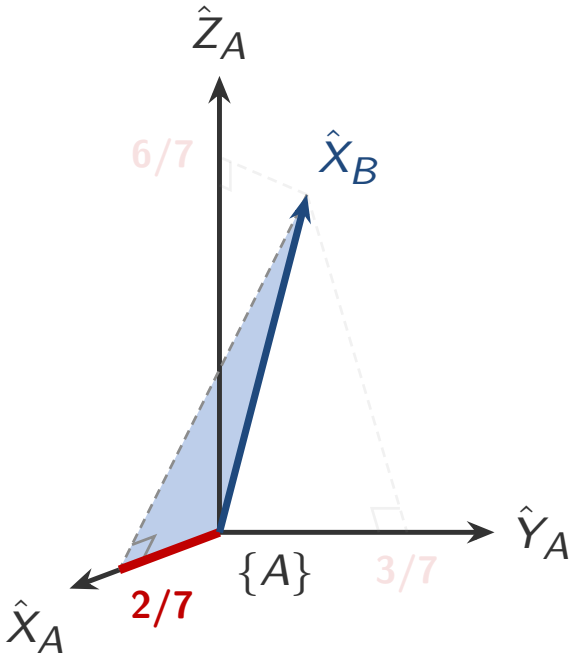
$$r_{ij} = (\{B\} \text{ 의 } j \text{ 번째 축}) \cdot (\{A\} \text{ 의 } i \text{ 번째 축}) \quad (3.6)$$

$$r_{11} = \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A = \|\hat{X}_B\|\,\|\hat{X}_A\|\cos\theta_{11} = \cos\theta_{11} \qquad (\text{두 축 모두 크기 } 1)$$

[직관] 원소 하나 = 두 축이 얼마나 평행한가
같은 방향이면 1, 수직이면 0, 반대 방향이면 -1.

방향코사인 — ${}^{A}\hat{X}_B = (2, 3, 6)/7$ 로 보기 (2/5)

$\hat{X}_B$ 끝에서 $\{A\}$ 의 세 축에 수선을 내리면 빗변이 $\|\hat{X}_B\| = 1$ 인 직각삼각형 3개.





$\hat{X}_A$ 방향

$r_{11} = 2/7$

$\theta_{11} \approx 73.4°$

$\hat{Y}_A$ 방향

$r_{21} = 3/7$

$\theta_{21} \approx 64.6°$

$\hat{Z}_A$ 방향

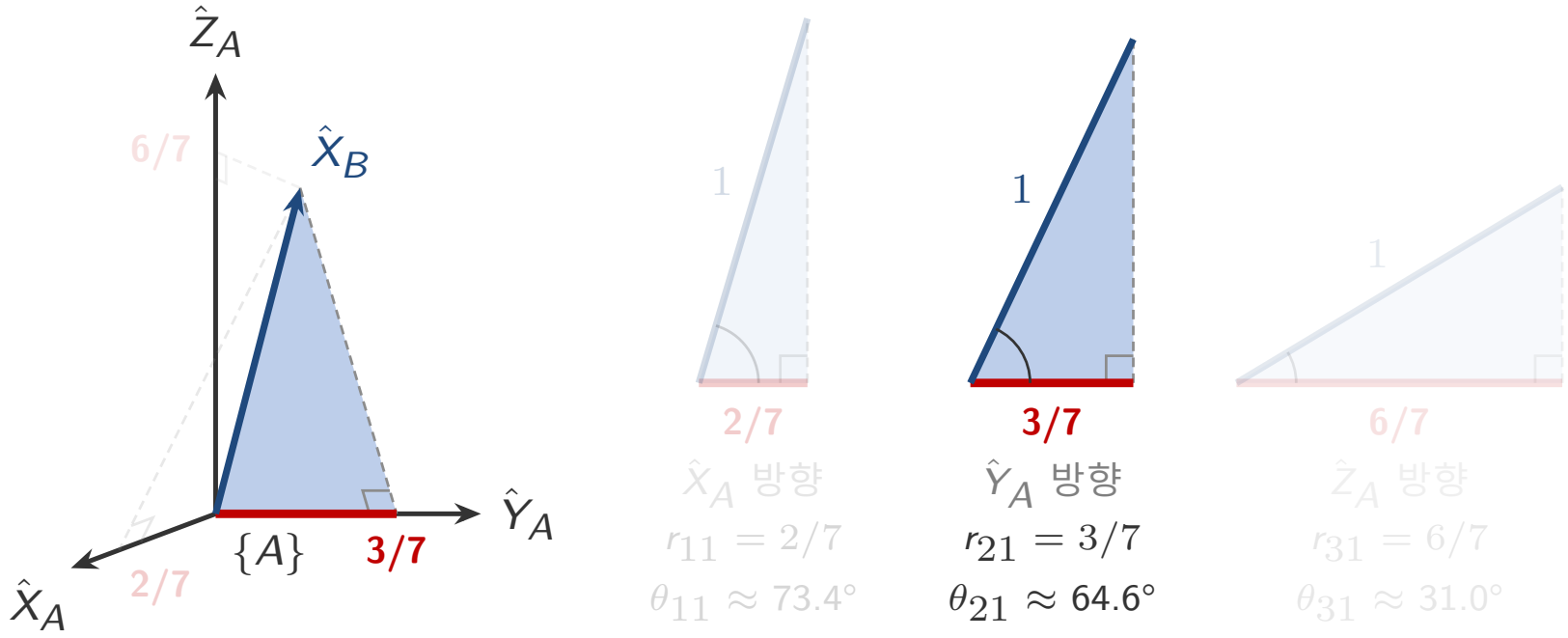
$r_{31} = 6/7$

$\theta_{31} \approx 31.0°$

[읽는 법] 직각삼각형($\{A\}$ 원점, 수선의 발, $\hat{X}_B$ 끝): 빗변이 1 이라 밑변 $= \cos\theta_{11}$.
밑변은 $\hat{X}_B$ 를 $\hat{X}_A$ 위로 정사영한 길이, 즉 $r_{11} = \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A = 2/7$ 이다.

방향코사인 — ${}^{A}\hat{X}_B = (2, 3, 6)/7$ 로 보기 (3/5)

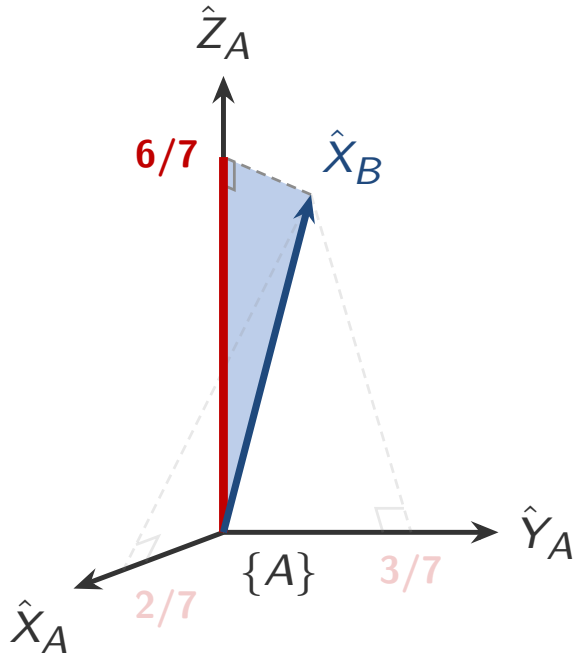
$\hat{X}_B$ 끝에서 $\{A\}$ 의 세 축에 수선을 내리면 빗변이 $\|\hat{X}_B\| = 1$ 인 직각삼각형 3개.



[읽는 법] 직각삼각형($\{A\}$ 원점, 수선의 발, $\hat{X}_B$ 끝): 밑변 $r_{21} = \cos\theta_{21} = 3/7$.
세 삼각형은 빗변이 모두 1 이고 밑변(방향코사인)만 다르다.

방향코사인 — ${}^{A}\hat{X}_B = (2, 3, 6)/7$ 로 보기 (4/5)

$\hat{X}_B$ 끝에서 $\{A\}$ 의 세 축에 수선을 내리면 빗변이 $\|\hat{X}_B\| = 1$ 인 직각삼각형 3개.



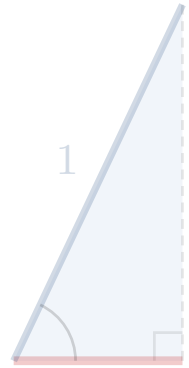


2/7

$\hat{X}_A$ 방향

$r_{11} = 2/7$

$\theta_{11} \approx 73.4°$

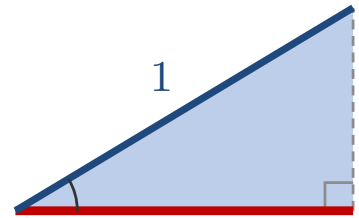


3/7

$\hat{Y}_A$ 방향

$r_{21} = 3/7$

$\theta_{21} \approx 64.6°$



6/7

$\hat{Z}_A$ 방향

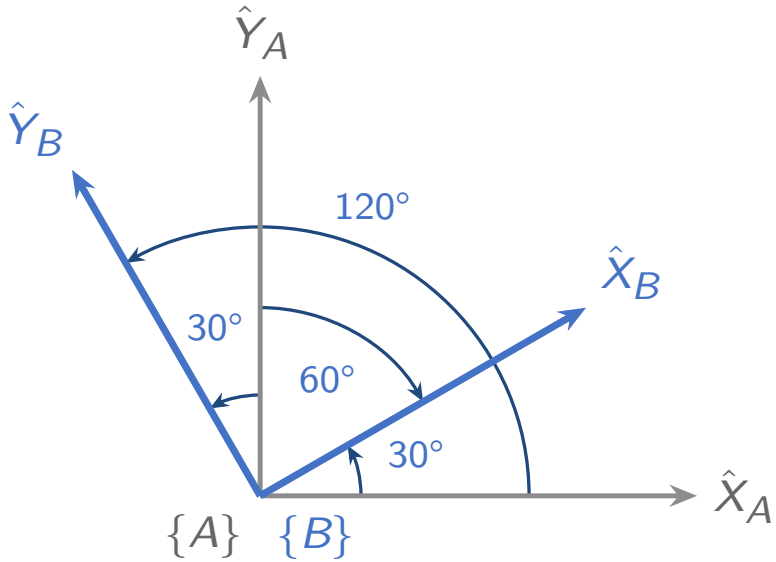
$r_{31} = 6/7$

$\theta_{31} \approx 31.0°$

[확인] $r_{31} = \cos\theta_{31} = 6/7$. $r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 4/49 + 9/49 + 36/49 = 1$.
첫째 열 ${}^{A}\hat{X}_B$ 는 선형대수 4장의 $(2,\ 3,\ 6)$ 을 정규화한 단위벡터라 제곱합이 1 이다.

방향코사인 — 30° 회전행렬의 원소 (5/5)

$\{B\}$: $\hat{Z}_A$ 에 대해 30° 회전. 그림에서 두 축의 사잇각을 구하고 $\cos$ 을 취한다.



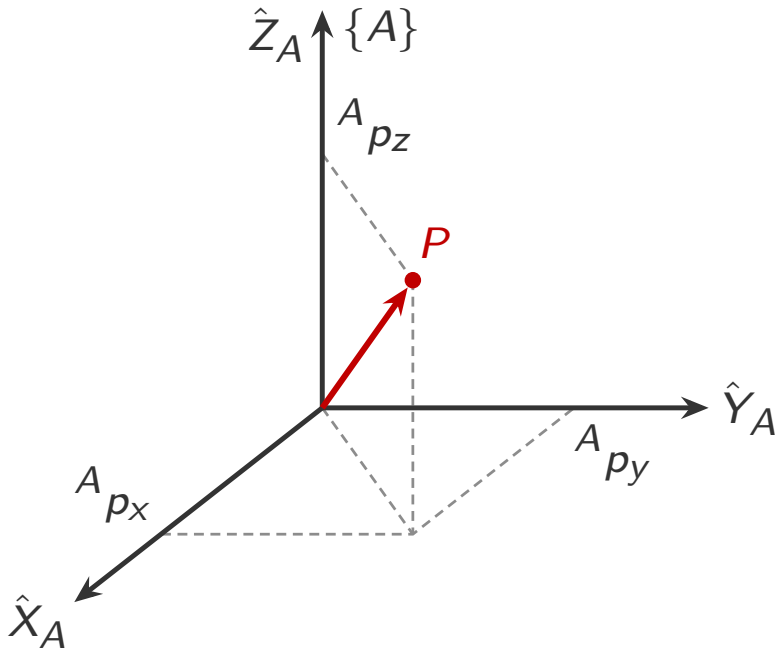
$$
{}^{A}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \cos 120^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 60^\circ & \cos 30^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$\hat{Z}_B = \hat{Z}_A$: $\cos 0^\circ = 1$, 다른 축과는 $\cos 90^\circ = 0$

[읽는 법] *j* **열**: $\{B\}$ 의 j 번째 축이 $\{A\}$ 의 세 축과 이루는 각 (첫째 열 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$)
i **행**: $\{A\}$ 의 i 번째 축이 $\{B\}$ 의 세 축과 이루는 각 (첫째 행 $30^\circ, 120^\circ, 90^\circ$)

같은 벡터의 성분 분해 — $\{A\}$ 기준 (1/2)

(3.6) r_{ij} 의 근거: 좌표계와 무관한 벡터 $\mathbf{P}$ 를 $\{A\}$ 의 세 축 방향 성분으로 분해한다.



$$ {}^A\mathbf{P} = \begin{bmatrix} {}^A p_x \\ {}^A p_y \\ {}^A p_z \end{bmatrix} $$

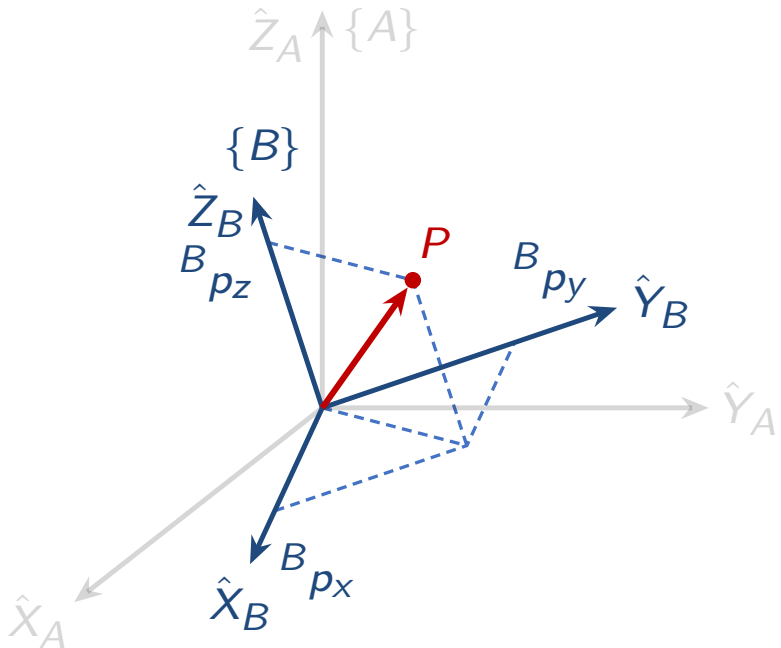
원점에서 회색 수선의 발까지의
부호 있는 길이가 성분 ${}^A p_x$, ${}^A p_y$, ${}^A p_z$

$$ \boxed{\mathbf{P} = {}^A p_x \hat{X}_A + {}^A p_y \hat{Y}_A + {}^A p_z \hat{Z}_A} $$

[읽는 법] 위치벡터 (3.1) ${}^A\mathbf{P} = p_x \hat{X}_A + p_y \hat{Y}_A + p_z \hat{Z}_A$ 와 같은 성분 분해다.

같은 벡터의 성분 분해 — $\{B\}$ 기준 (2/2)

같은 벡터 $\mathbf{P}$ 를 $\{B\}$ 의 세 축 방향 성분으로 분해한다. 두 좌표계의 원점은 같다.



$$ {}^B\mathbf{P} = \begin{bmatrix} {}^B p_x \\ {}^B p_y \\ {}^B p_z \end{bmatrix} $$

원점에서 파란 수선의 발까지의
부호 있는 길이가 성분 ${}^B p_x$, ${}^B p_y$, ${}^B p_z$

$$ \boxed{\mathbf{P} = {}^A p_x \hat{X}_A + {}^A p_y \hat{Y}_A + {}^A p_z \hat{Z}_A = {}^B p_x \hat{X}_B + {}^B p_y \hat{Y}_B + {}^B p_z \hat{Z}_B} \qquad (3.7) $$

[주의] 원점이 다르면 (3.5) ${}^A\mathbf{P} = {}^A_B\mathbf{R}\,{}^B\mathbf{P} + {}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 를 쓴다.

내적을 이용한 좌표 변환 — 성분별 계산 (1/5)

성분 분해 (3.7) 의 양변에 $\hat{X}_A$ 를 내적한다.

$$\mathbf{P} = {}^{A}p_x\,\hat{X}_A + {}^{A}p_y\,\hat{Y}_A + {}^{A}p_z\,\hat{Z}_A = {}^{B}p_x\,\hat{X}_B + {}^{B}p_y\,\hat{Y}_B + {}^{B}p_z\,\hat{Z}_B \quad (3.7)$$

▶ **좌변 — 내적의 분배법칙 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ (선형대수 4장)**

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\cdot\hat{X}_A &= {}^{A}p_x\,(\hat{X}_A\cdot\hat{X}_A) + {}^{A}p_y\,(\hat{Y}_A\cdot\hat{X}_A) + {}^{A}p_z\,(\hat{Z}_A\cdot\hat{X}_A)\\ &= {}^{A}p_x(1) + {}^{A}p_y(0) + {}^{A}p_z(0) = {}^{A}p_x\end{aligned}$$

▶ 우변 — 세 괄호는 차례로 방향코사인 r_{11}, r_{12}, r_{13}

$$\mathbf{P}\cdot\hat{X}_A = {}^{B}p_x\,(\hat{X}_B\cdot\hat{X}_A) + {}^{B}p_y\,(\hat{Y}_B\cdot\hat{X}_A) + {}^{B}p_z\,(\hat{Z}_B\cdot\hat{X}_A)$$

$$\boxed{{}^{A}p_x = {}^{B}p_x\,r_{11} + {}^{B}p_y\,r_{12} + {}^{B}p_z\,r_{13}}$$

[읽는 법] $\{A\}$ 의 세 축은 크기 1 이고 서로 수직이라 $\hat{X}_A$ 와의 내적은 차례로 1, 0, 0

내적을 이용한 좌표 변환 — 성분별 계산 (2/5)

성분 분해 (3.7) 의 양변에 $\hat{X}_A$ 를 내적한다.

$$\mathbf{P} = {}^{A}p_x\,\hat{X}_A + {}^{A}p_y\,\hat{Y}_A + {}^{A}p_z\,\hat{Z}_A = {}^{B}p_x\,\hat{X}_B + {}^{B}p_y\,\hat{Y}_B + {}^{B}p_z\,\hat{Z}_B \quad (3.7)$$

▶ **좌변 — 내적의 분배법칙 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ (선형대수 4장)**

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\cdot\hat{X}_A &= {}^{A}p_x\,(\hat{X}_A\cdot\hat{X}_A) + {}^{A}p_y\,(\hat{Y}_A\cdot\hat{X}_A) + {}^{A}p_z\,(\hat{Z}_A\cdot\hat{X}_A)\\ &= {}^{A}p_x(1) + {}^{A}p_y(0) + {}^{A}p_z(0) = {}^{A}p_x\end{aligned}$$

▶ **우변 — 세 괄호는 차례로 방향코사인 r_{11}, r_{12}, r_{13}**

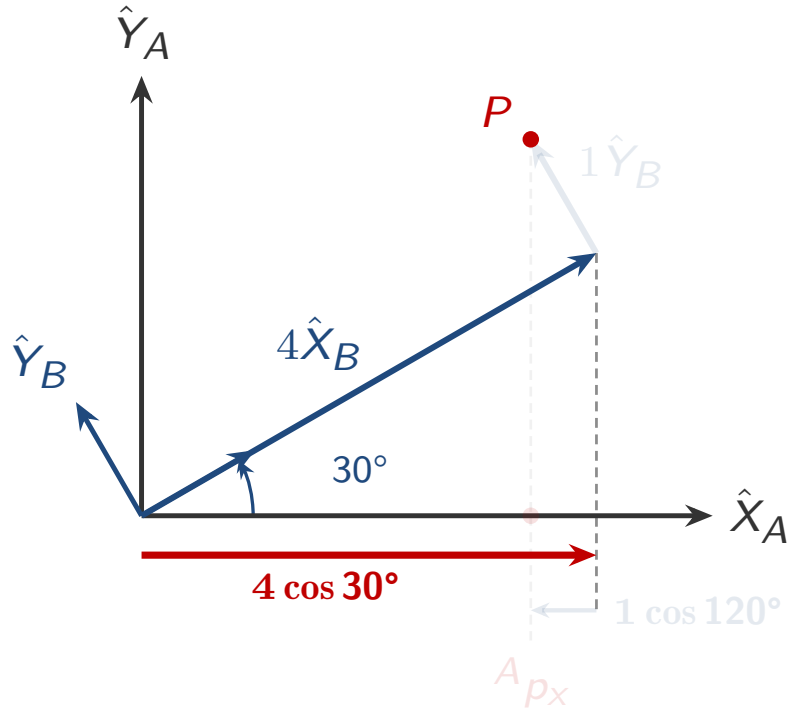
$$\mathbf{P}\cdot\hat{X}_A = {}^{B}p_x\,(\hat{X}_B\cdot\hat{X}_A) + {}^{B}p_y\,(\hat{Y}_B\cdot\hat{X}_A) + {}^{B}p_z\,(\hat{Z}_B\cdot\hat{X}_A)$$

$$\boxed{{}^{A}p_x = {}^{B}p_x\,\mathbf{r_{11}} + {}^{B}p_y\,\mathbf{r_{12}} + {}^{B}p_z\,\mathbf{r_{13}}}$$

[직관] 특정 방향 성분은 그 방향의 단위벡터와 내적해서 구한다.

내적을 이용한 좌표 변환 — 정사영의 합 (3/5)

양변에 $\hat{Y}_A$, $\hat{Z}_A$ 도 내적해 얻은 세 식을 행렬 곱으로 정리한다.



$$\begin{bmatrix} {}^Ap_x \\ {}^Ap_y \\ {}^Ap_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^Bp_x \\ {}^Bp_y \\ {}^Bp_z \end{bmatrix}$$

가운데 행렬 $= [\, r_{ij} \,] = {}^A_B\mathbf{R}$

$$\boxed{(3.4)\quad {}^A\mathbf{P} = {}^A_B\mathbf{R}\,{}^B\mathbf{P}}$$

$${}^Ap_x = 4\cos 30^\circ + 1\cos 120^\circ$$

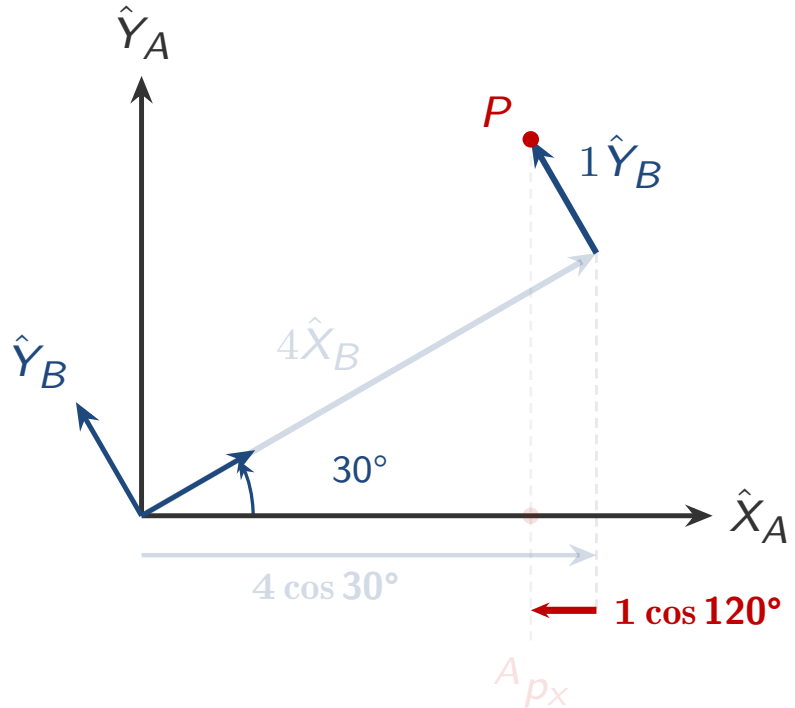
$$= 2\sqrt{3} - 1/2 \approx 2.96$$

$\{B\}$: 원점 공유, $\hat{Z}_A$ 에 대해 30°, ${}^B\mathbf{P} = (4,\ 1,\ 0)$

[읽는 법] $4\hat{X}_B$ 를 $\hat{X}_A$ 위로 정사영: $4\cos 30^\circ = 4\, r_{11}$ (오른쪽으로 $2\sqrt{3}$)

내적을 이용한 좌표 변환 — 정사영의 합 (4/5)

양변에 $\hat{Y}_A$, $\hat{Z}_A$ 도 내적해 얻은 세 식을 행렬 곱으로 정리한다.



$\{B\}$: 원점 공유, $\hat{Z}_A$ 에 대해 $30°$, ${}^B\mathbf{P} = (4,\ 1,\ 0)$

$$\begin{bmatrix} {}^A p_x \\ {}^A p_y \\ {}^A p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \mathbf{r_{12}} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B p_x \\ \mathbf{{}^B p_y} \\ {}^B p_z \end{bmatrix}$$

가운데 행렬 $= [\, r_{ij} \,] = {}^A_B\mathbf{R}$

$$\boxed{(3.4)\quad {}^A\mathbf{P} = {}^A_B\mathbf{R}\,{}^B\mathbf{P}}$$

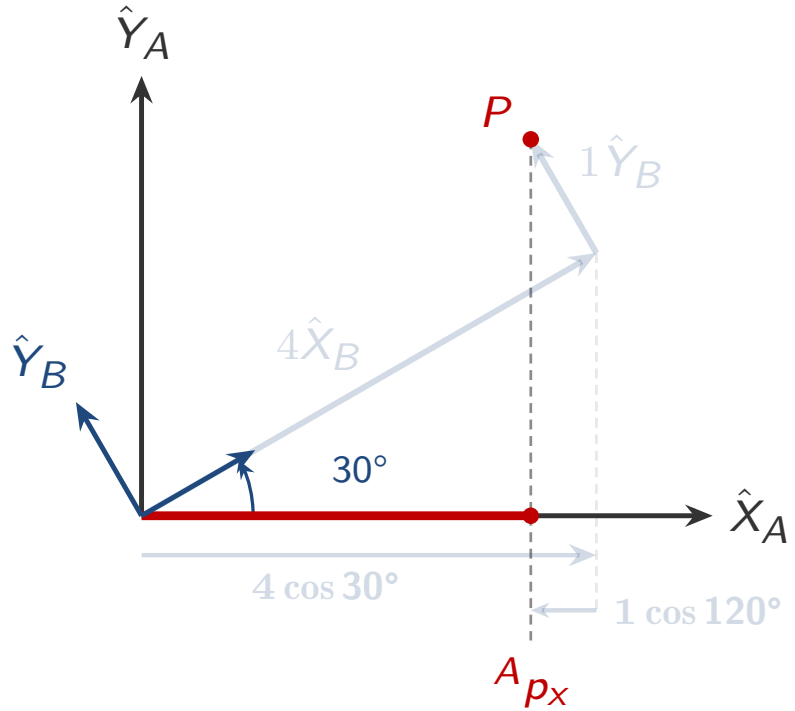
$${}^A p_x = 4\cos 30° + \mathbf{1\cos 120°}$$

$$= 2\sqrt{3} - 1/2 \approx 2.96$$

[읽는 법] $1\hat{Y}_B$ 를 $\hat{X}_A$ 위로 정사영: $1\cos 120° = 1\, r_{12} = -1/2$ (음수라 왼쪽)

내적을 이용한 좌표 변환 — 정사영의 합 (5/5)

양변에 $\hat{Y}_A$, $\hat{Z}_A$ 도 내적해 얻은 세 식을 행렬 곱으로 정리한다.



$\{B\}$: 원점 공유, $\hat{Z}_A$ 에 대해 $30°$, ${}^B\mathbf{P} = (4,\ 1,\ 0)$

$$\begin{bmatrix} {}^A p_x \\ {}^A p_y \\ {}^A p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B p_x \\ {}^B p_y \\ {}^B p_z \end{bmatrix}$$

가운데 행렬 $= [\, r_{ij} \,] = {}^A_B\mathbf{R}$

$$\boxed{(3.4)\quad {}^A\mathbf{P} = {}^A_B\mathbf{R}\,{}^B\mathbf{P}}$$

$$\begin{aligned} {}^A p_x &= 4\cos 30° + 1\cos 120° \\ &= 2\sqrt{3} - 1/2 \approx \mathbf{2.96} \end{aligned}$$

[확인] 같은 방법으로 ${}^A p_y = 4\cos 60° + 1\cos 30° = 2 + \sqrt{3}/2 \approx 2.87$

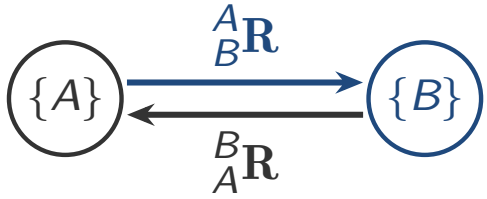
회전행렬의 역 — 전치행렬 = 역행렬 (1/3)

RECALL 선형대수 2장

전치행렬 $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$: 행과 열을 서로 바꾼 행렬. 단위행렬 $\mathbf{I}_n$: 주대각선 1, 나머지 0
역행렬: 정사각행렬 $\mathbf{A}$ 에 대해 $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n = \mathbf{BA}$ 이면 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

$$\boxed{{}^{B}_{A}\mathbf{R} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathsf{T}} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{-1}} \qquad (3.8)$$

${}^{B}_{A}\mathbf{R}$: $\{A\}$ 의 축을 $\{B\}$ 에서 표현한 회전행렬



▶ **예 — $\hat{Z}_A$ 에 대해 30° 회전한 $\{B\}$ (평면, $c = \cos 30^\circ$, $s = \sin 30^\circ$)**

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \quad {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{bmatrix} $$

[직관] 역방향 회전행렬은 전치 한 번으로 구한다.
전치하면 $\pm s$ 두 원소의 위치만 바뀌어 반대 방향(-30°) 회전이 된다.

회전행렬의 역 — 왜 전치인가 (2/3)

RECALL 선형대수 4장

내적을 행렬 곱으로: 열벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 에 대해 $\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

▶ 왜 그런가 — (3.3) ${}^{A}_{B}\mathbf{R} = \left[\, {}^{A}\hat{X}_B \;\; {}^{A}\hat{Y}_B \;\; {}^{A}\hat{Z}_B \,\right]$ 의 열끼리 내적

$$
{}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\,{}^{A}_{B}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_B & \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_B & \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_B \\ \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_B & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_B & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_B \\ \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_B & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_B & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3
$$

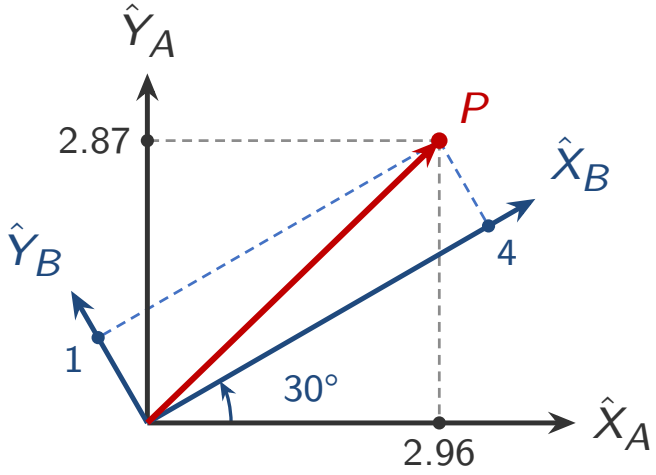
(i, j) 성분 $=$ (i 열)$^{\mathsf{T}}$(j 열) $=$ i 열 $\cdot$ j 열: 같은 축이면 크기$^2 = 1$, 다른 축이면 수직이라 0

[결론] 열($\{B\}$ 의 축)은 크기 1 이고 서로 수직(정규직교)이라 ${}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\,{}^{A}_{B}\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$.
행($\{B\}$ 에서 표현한 $\{A\}$ 의 축)도 정규직교라 ${}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}_3$.

회전행렬의 역 — 역변환과 크기 보존 (3/3)

(3.8) ${}^{B}_{A}\mathbf{R} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}$ 를 곱하면 $\{A\}$ 기준 좌표가 $\{B\}$ 기준 좌표로 역변환된다.

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\,{}^{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} - 1/2 \\ 2 + \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} $$



$\{B\}$: 원점 공유, $\hat{Z}_A$ 에 대해 30°

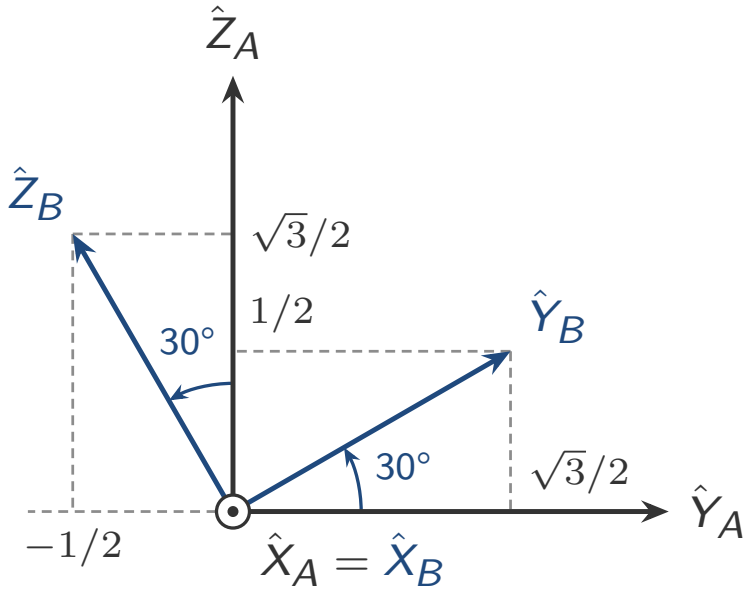
▶ **크기 보존 — $\mathbf{R} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}$**

$$ \begin{aligned} \|\mathbf{R}\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{R}\mathbf{v})^{\mathsf{T}}(\mathbf{R}\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}\,\mathbf{v} \quad (\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \\ &= \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 \quad (3.8)\ \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I}_3 \end{aligned} $$

[결론] $\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ 이므로 회전행렬을 곱해도 **모든 벡터의 크기가 그대로**다.

예제 3-1 X축에 대한 30° 회전

$\{B\}$ 는 $\{A\}$ 를 $\hat{X}_A$ 에 대해 30° 회전한 좌표계다. ${}^A_B\mathbf{R}$ 을 구하시오.



$\hat{X}_A$ 가 화면 밖을 향하는($\odot$) 측면도

수선의 발 좌표 $= {}^A_B\mathbf{R}$ 둘째 · 셋째 열의 Y, Z 성분

SOLUTION 3-1

▶ (1) 그림에서 사잇각을 구한다

	$\hat{X}_B$	$\hat{Y}_B$	$\hat{Z}_B$
$\hat{X}_A$	0°	90°	90°
$\hat{Y}_A$	90°	30°	120°
$\hat{Z}_A$	90°	60°	30°

▶ (2) 사잇각의 cos 을 취한다

$$ {}^A_B\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \cos 90^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 30^\circ & \cos 120^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 60^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} $$

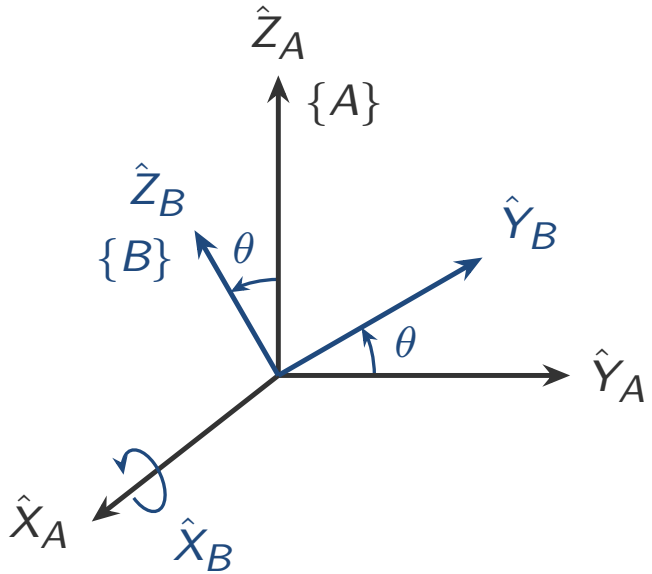
[검산] 둘째 열 · 셋째 열 $= \cos 30^\circ \cos 120^\circ + \cos 60^\circ \cos 30^\circ = 0$ (서로 수직)

기본 회전행렬 — $\mathbf{R}_X(\theta)$

CONCEPT 정의

기본 회전행렬: $\{A\}$ 의 좌표축 하나에 대해 θ 회전한 $\{B\}$ 의 ${}^A_B\mathbf{R}$

표기: $c_\theta = \cos\theta$, $s_\theta = \sin\theta$



▶ **왜 그런가 — 사잇각의 cos**

$$r_{22} = r_{33} = \cos\theta = c_\theta$$

$$r_{23} = \cos(90^\circ + \theta) = -s_\theta \qquad \hat{Y}_A,\ \hat{Z}_B$$

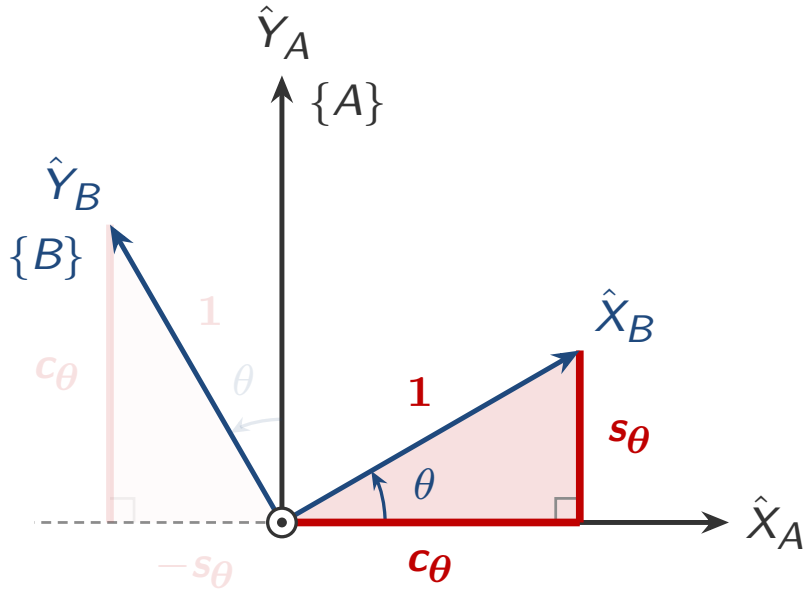
$$r_{32} = \cos(90^\circ - \theta) = s_\theta \qquad \hat{Z}_A,\ \hat{Y}_B$$

$$\mathbf{R}_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

[확인] $\hat{X}_B = \hat{X}_A$ 라 첫 행 · 첫 열은 $(1,\ 0,\ 0)$. $\theta = 30^\circ$ 이면 예제 3-1 의 ${}^A_B\mathbf{R}$.

기본 회전행렬 — $\mathbf{R}_Z(\theta)$ (1/2)

(3.3) ${}^A_B\mathbf{R} = \left[{}^A\hat{X}_B \;\; {}^A\hat{Y}_B \;\; {}^A\hat{Z}_B \right]$: 회전한 축의 $\{A\}$ 성분이 열이다.



$\hat{Z}_A = \hat{Z}_B$ (종이 밖)

$$\mathbf{R}_Z(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

${}^A\hat{X}_B = (c_\theta,\ s_\theta,\ 0)$

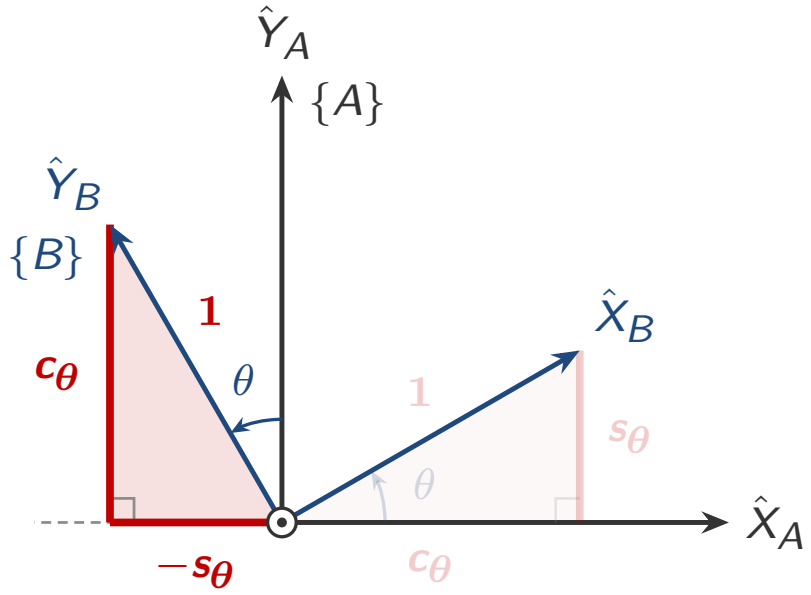
${}^A\hat{Y}_B = (-s_\theta,\ c_\theta,\ 0)$

${}^A\hat{Z}_B = (0,\ 0,\ 1)$

[읽는 법] 빗변이 단위벡터(길이 1)라 밑변과 높이가 그대로 성분 c_θ, s_θ 이다.

기본 회전행렬 — $\mathbf{R}_Z(\theta)$ (2/2)

(3.3) ${}^A_B\mathbf{R} = \left[{}^A\hat{X}_B \;\; {}^A\hat{Y}_B \;\; {}^A\hat{Z}_B \right]$: 회전한 축의 $\{A\}$ 성분이 열이다.



$\hat{Z}_A = \hat{Z}_B$ (종이 밖)

$$\mathbf{R}_Z(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

$${}^A\hat{X}_B = (c_\theta,\ s_\theta,\ 0)$$

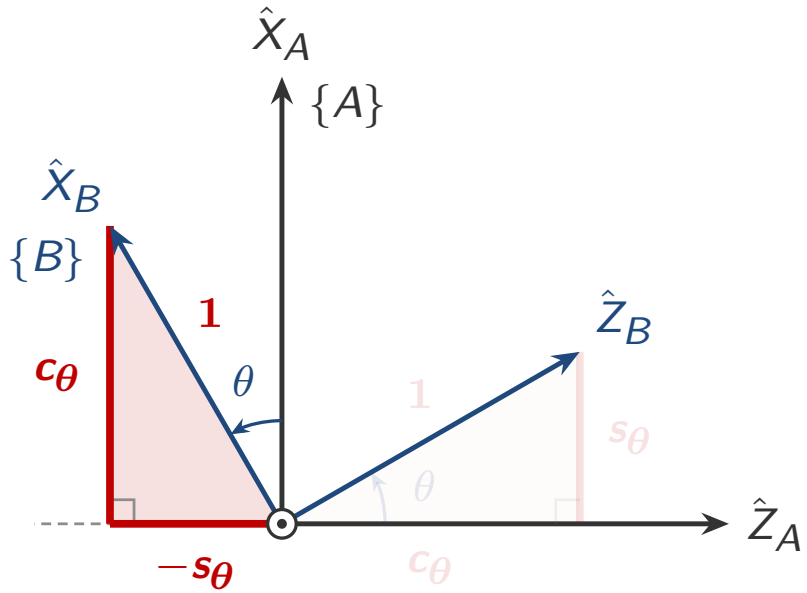
$${}^A\hat{Y}_B = (-s_\theta,\ c_\theta,\ 0)$$

$${}^A\hat{Z}_B = (0,\ 0,\ 1)$$

[확인] $\mathbf{R}_Z(90^\circ)\,(1,\ 0,\ 0) = (0,\ 1,\ 0)$: 오른손 법칙에 따라 $\hat{X}_A$ 가 $\hat{Y}_A$ 로 회전한다.

기본 회전행렬 — $\mathbf{R}_Y(\theta)$ (1/2)

$\hat{Y}_A$ 를 종이 밖으로 두면 오른손 좌표계라 가로가 $\hat{Z}_A$, 세로가 $\hat{X}_A$ 다.



$\hat{Y}_A = \hat{Y}_B$ (종이 밖)

$$\mathbf{R}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$${}^A\hat{X}_B = (c_\theta,\ 0,\ -s_\theta)$$

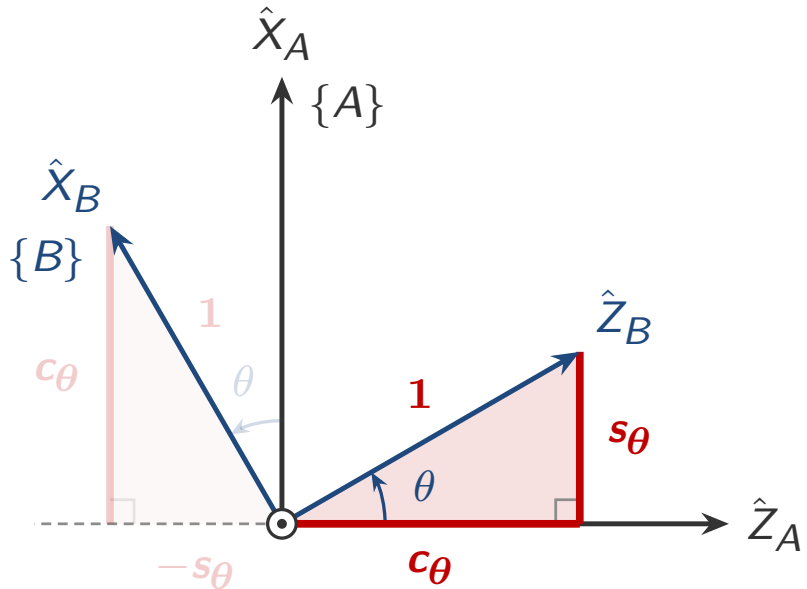
$${}^A\hat{Y}_B = (0,\ 1,\ 0)$$

$${}^A\hat{Z}_B = (s_\theta,\ 0,\ c_\theta)$$

[주의] $-s_\theta$ 는 $\hat{X}_B$ 의 Z 성분이라 셋째 행 · 첫째 열, 즉 **왼쪽 아래** 칸이다.

기본 회전행렬 — $\mathbf{R}_Y(\theta)$ (2/2)

$\hat{Y}_A$ 를 종이 밖으로 두면 오른손 좌표계라 가로가 $\hat{Z}_A$, 세로가 $\hat{X}_A$ 다.



$\hat{Y}_A = \hat{Y}_B$ (종이 밖)

$$\mathbf{R}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

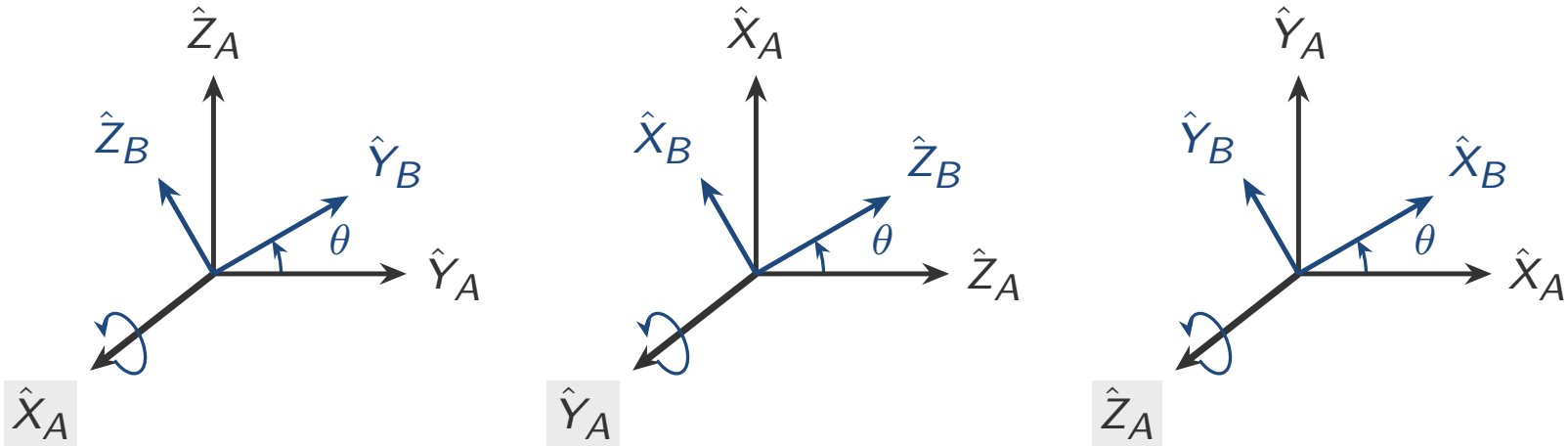
$${}^A\hat{X}_B = (c_\theta,\ 0,\ -s_\theta)$$

$${}^A\hat{Y}_B = (0,\ 1,\ 0)$$

$${}^A\hat{Z}_B = (s_\theta,\ 0,\ c_\theta)$$

[확인] $\mathbf{R}_Y(90^\circ)\,(0,\ 0,\ 1) = (1,\ 0,\ 0)$: $\hat{Z}_A$ 가 $\hat{X}_A$ 로 회전한다.

기본 회전행렬 — 세 행렬 비교

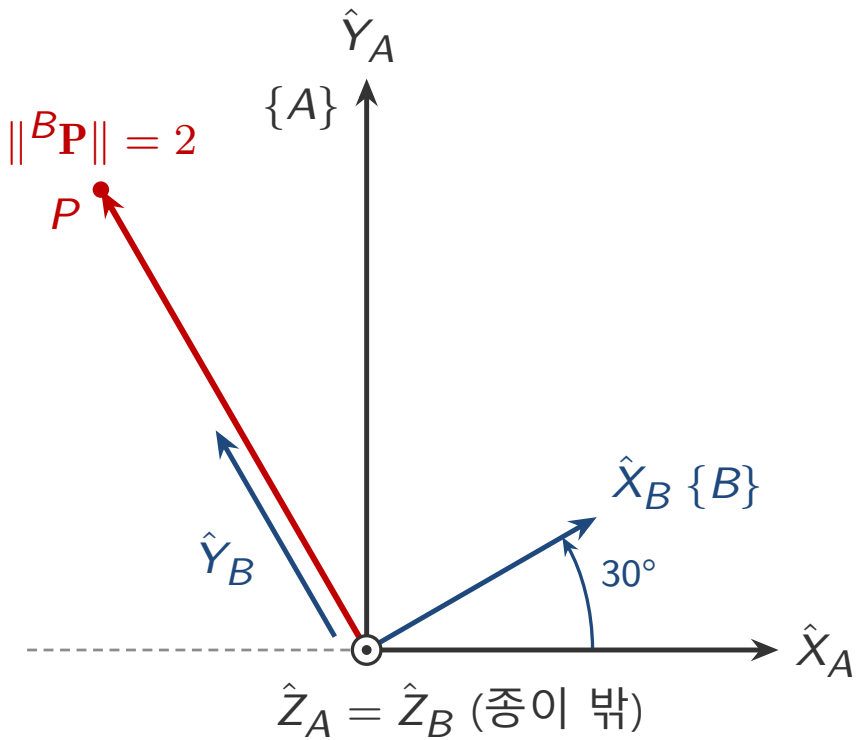


$$\mathbf{R}_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_Z(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[읽는 법] 회전축의 행 · 열은 **0 과 1**: 그 축 성분은 회전해도 변하지 않는다.
나머지 네 칸은 c_θ 두 개와 $\pm s_\theta$ 두 개다.
회전 방향은 순환 $X \to Y \to Z \to X$: $\mathbf{R}_X$ 는 $Y \to Z$, $\mathbf{R}_Y$ 는 $Z \to X$, $\mathbf{R}_Z$ 는 $X \to Y$.

예제 3-2 Z축에 대해 $30°$ 회전한 $\{B\}$ 에서 표현한 점 (1/2)

$\{B\}$ 는 $\{A\}$ 를 $\hat{Z}_A$ 에 대해 $30°$ 회전한 좌표계다.
점 P 의 $\{B\}$ 기준 좌표가 ${}^{B}\mathbf{P} = (0,\ 2,\ 0)$ 일 때 ${}^{A}\mathbf{P}$ 를 구하시오.



예제 3-2 Z축에 대해 30° 회전한 $\{B\}$ 에서 표현한 점 (2/2)

SOLUTION 3-2

$\{B\}$ 는 $\hat{Z}_A$ 에 대해 30° 회전, ${}^B\mathbf{P} = (0,\ 2,\ 0)$.

▶ **(1) 열로 보기 — ${}^B\mathbf{P} = 2\,{}^B\hat{Y}_B = (0,\ 2,\ 0)$ 이라 둘째 열의 2배**

$$ {}^A\mathbf{P} = 2\,{}^A\hat{Y}_B = 2\,(-\sin 30^\circ,\ \cos 30^\circ,\ 0) = (-1,\ \sqrt{3},\ 0) $$

▶ **(2) 행렬 곱 — ${}^A\mathbf{P} = \mathbf{R}_Z(30^\circ)\,{}^B\mathbf{P}$**

$$ \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin 30^\circ \\ 2\cos 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} $$

[검산] 방향 $\hat{X}_A$ 에서 120°: $2\,(\cos 120^\circ,\ \sin 120^\circ) = (-1,\ \sqrt{3})$.
크기 $\|{}^A\mathbf{P}\|^2 = (-1)^2 + 3 = 4,\ \ \|{}^A\mathbf{P}\| = 2 = \|{}^B\mathbf{P}\|$.

Ch 3 정리

개념	식	번호
위치벡터	${}^{A}\mathbf{P} = p_x\,\hat{X}_A + p_y\,\hat{Y}_A + p_z\,\hat{Z}_A = (p_x,\ p_y,\ p_z)$	(3.1)
병진 (축 방향이 같을 때)	${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$	(3.2)
회전행렬 = 회전한 축의 열	${}^{A}_{B}\mathbf{R} = \left[\ {}^{A}\hat{X}_B\ \ {}^{A}\hat{Y}_B\ \ {}^{A}\hat{Z}_B\ \right]$	(3.3)
좌표 변환 (원점이 같을 때)	${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P}$	(3.4)
좌표 변환	${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$	(3.5)
방향코사인	$r_{ij} = \{B\}$ 의 j 번째 축 $\cdot\ \{A\}$ 의 i 번째 축	(3.6)
같은 벡터의 성분 분해	$\mathbf{P} = {}^{A}p_x\,\hat{X}_A + \cdots = {}^{B}p_x\,\hat{X}_B + \cdots$	(3.7)
회전행렬의 역	${}^{B}_{A}\mathbf{R} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathsf{T}} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{-1}$	(3.8)
기본 회전행렬	$\mathbf{R}_X(\theta),\ \ \mathbf{R}_Z(\theta),\ \ \mathbf{R}_Y(\theta)$	(3.9)∼(3.11)

[다음 장] Ch.4 동차 변환과 기구학: (3.5) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 의 회전(곱)과 병진(합)을 행렬 곱 하나로 묶는다.