Robotics
응용로봇공학및설계

Chapter 4

동차 변환과 기구학
(Homogeneous Transformations and Kinematics)

동차 변환 · 변환 방정식 · 순기구학 · 역기구학

Department of Control & Instrumentation Engineering
Pukyong National University, Busan, Korea
pnj@pknu.ac.kr

Chapter 4. 동차 변환과 기구학

4.1 동차 변환

4.2 연속 변환과 역변환

4.3 변환 방정식

4.4 절대 변환과 상대 변환

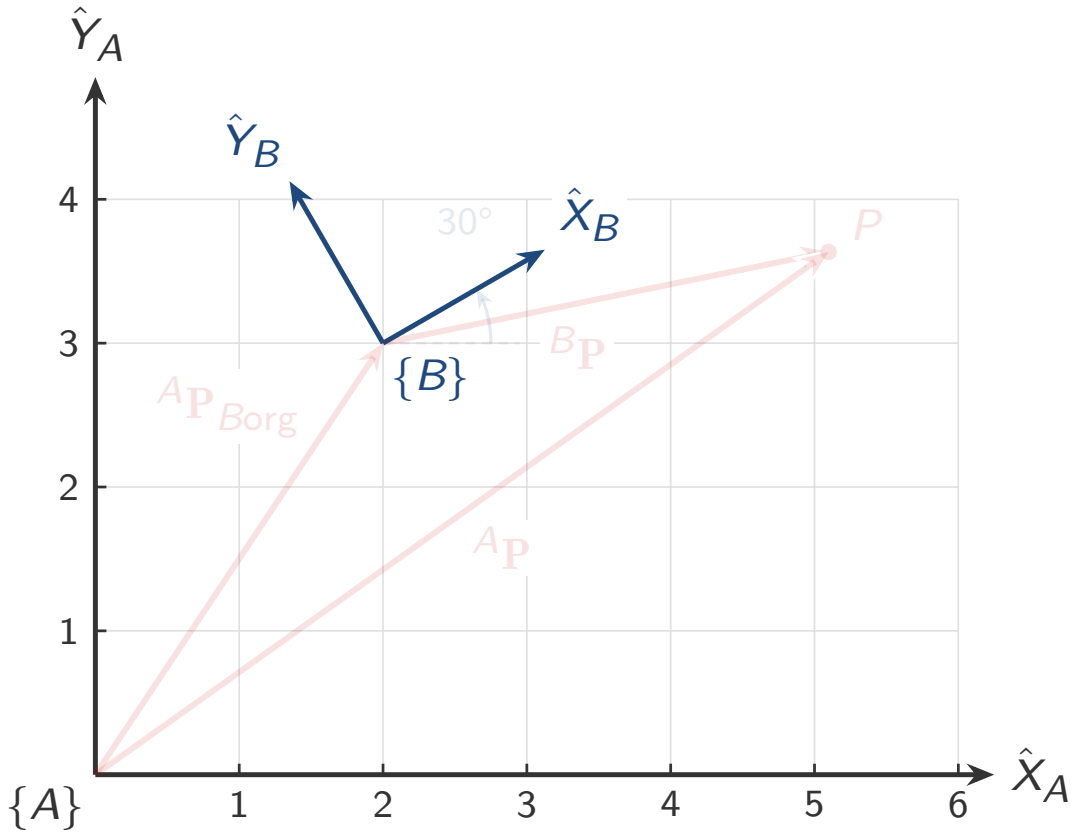
4.5 2링크 팔의 순기구학과 역기구학

[왜 필요한가] 회전(곱)과 병진(합)이 섞인 식은 좌표계가 늘수록 복잡해진다.
둘을 행렬 곱 하나로 묶는다.

학습목표

- **동차변환행렬**로 회전과 병진을 하나의 행렬 곱으로 나타낼 수 있다.
- **연속 변환**과 **역변환**으로 변환 방정식의 미지 변환을 구할 수 있다.
- **절대 변환**과 **상대 변환**에서 새 행렬을 곱하는 위치를 구별할 수 있다.
- 2링크 팔의 **순기구학**과 **역기구학**을 계산할 수 있다.

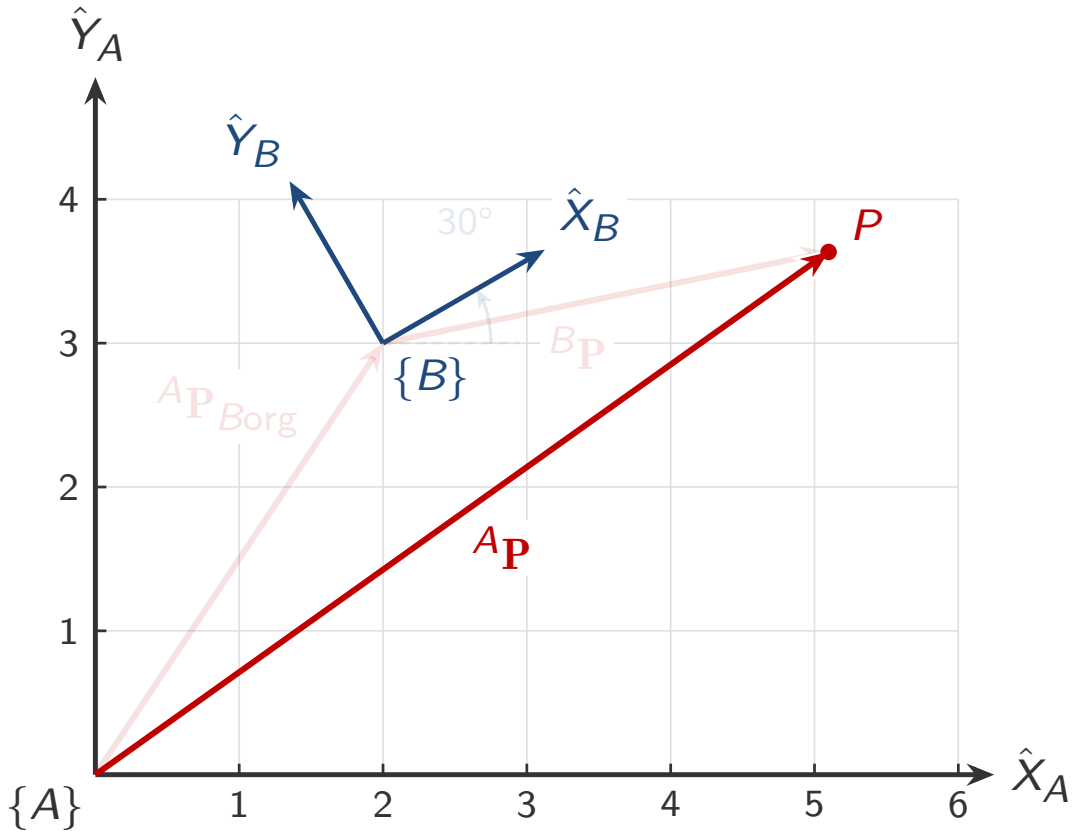
표기 다시 보기 — 단위벡터 (1/6)



① **단위벡터 $\hat{X}$, $\hat{Y}$**
② 위치벡터 ${}^A\mathbf{P}$
③ $\{B\}$ 원점의 위치 ${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$
④ $\{B\}$ 기준 좌표 ${}^B\mathbf{P}$
⑤ 회전행렬 ${}^A_B\mathbf{R}$
⑥ 좌표 변환 (3.5)

[표기] $\hat{}$ = 크기 1 인 축 방향 단위벡터
좌하첨자 = 그 축이 속한 좌표계 ($\hat{X}_A$, $\hat{Y}_A$: $\{A\}$ 의 축, $\hat{X}_B$, $\hat{Y}_B$: $\{B\}$ 의 축)

표기 다시 보기 — 위치벡터 (2/6)



① 단위벡터 $\hat{X}$, $\hat{Y}$

② **위치벡터 ${}^A\mathbf{P}$**

③ $\{B\}$ 원점의 위치 ${}^A\mathbf{P}_{Borg}$

④ $\{B\}$ 기준 좌표 ${}^B\mathbf{P}$

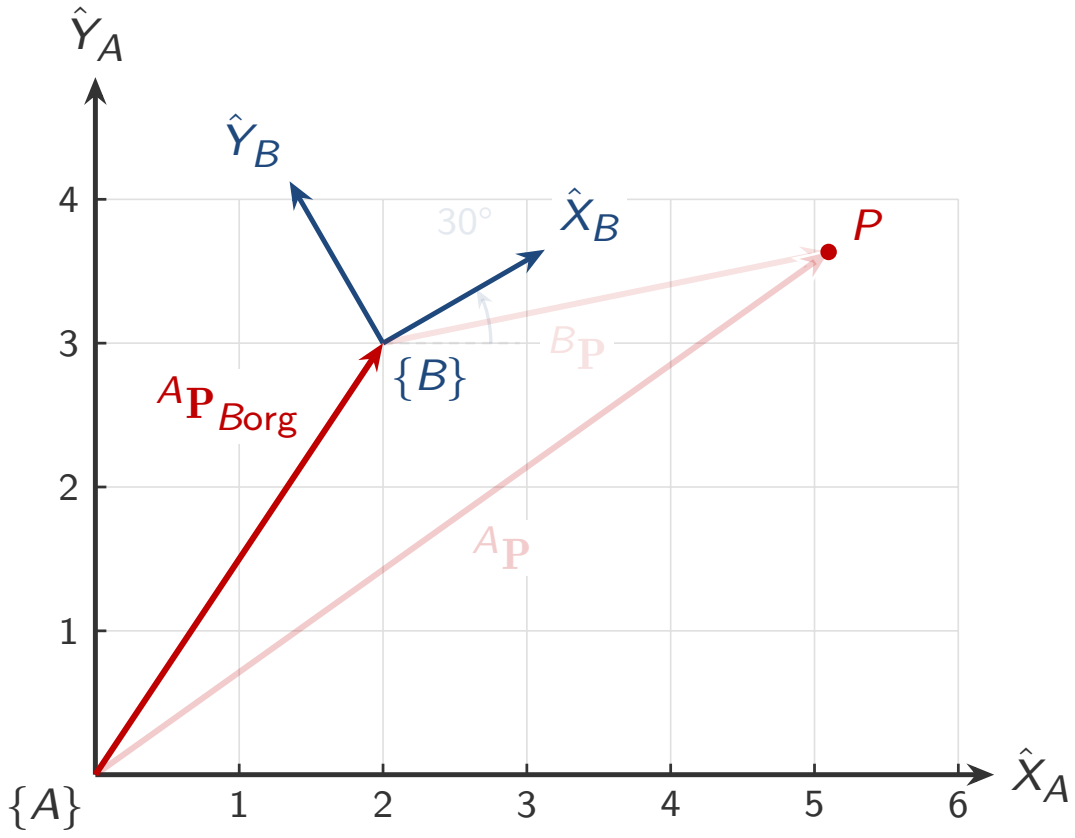
⑤ 회전행렬 ${}^A_B\mathbf{R}$

⑥ 좌표 변환 (3.5)

[표기] 위치벡터 ${}^A\mathbf{P}$: $\{A\}$ 원점에서 점 P 까지

좌상첨자 = 기준 좌표계: ${}^A\mathbf{P} = p_x\,\hat{X}_A + p_y\,\hat{Y}_A$ ($\{A\}$ 의 축 방향 성분)

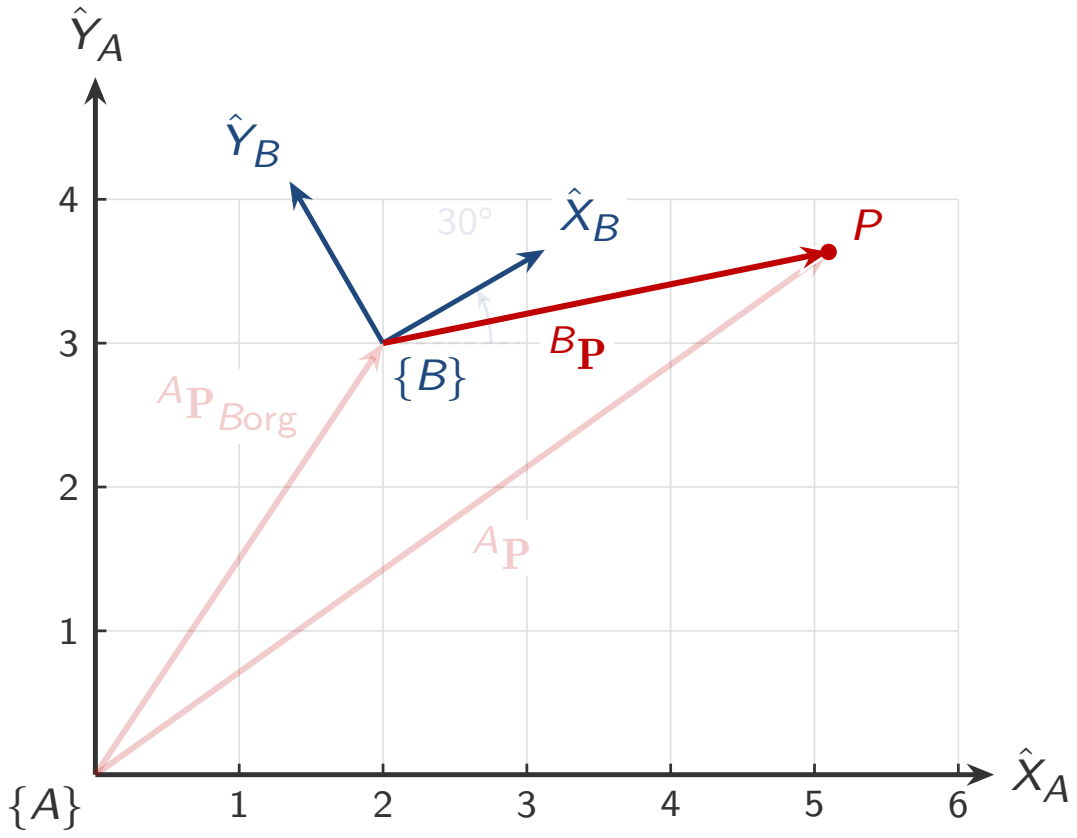
표기 다시 보기 — $\{B\}$ 원점의 위치 (3/6)



① 단위벡터 $\hat{X}$, $\hat{Y}$
② 위치벡터 ${}^A\mathbf{P}$
③ **$\{B\}$ 원점의 위치 ${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$**
④ $\{B\}$ 기준 좌표 ${}^B\mathbf{P}$
⑤ 회전행렬 ${}^A_B\mathbf{R}$
⑥ 좌표 변환 (3.5)

[표기] ${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$: $\{A\}$ 원점에서 $\{B\}$ 원점까지의 위치벡터
아래첨자 $B\text{org} = \{B\}$ 의 원점(origin). 이 장의 $\{B\}$: ${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}} = (2,\ 3)$

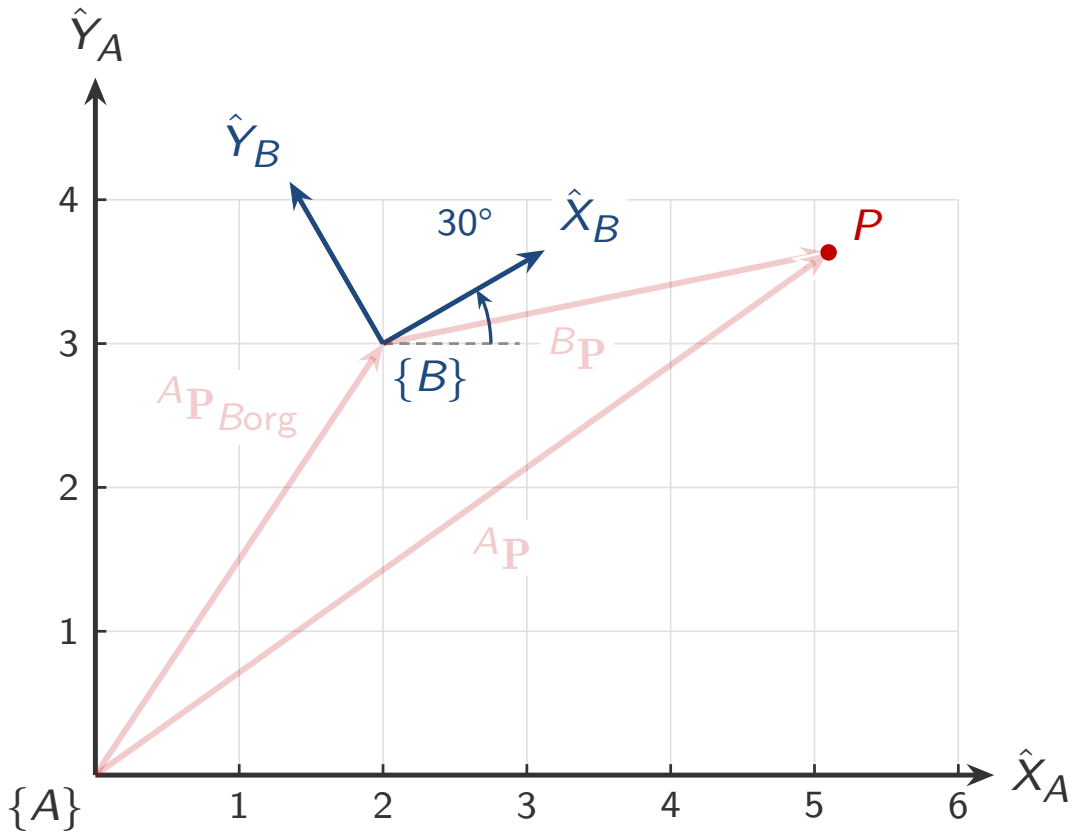
표기 다시 보기 — $\{B\}$ 기준 좌표 (4/6)



① 단위벡터 $\hat{X}$, $\hat{Y}$
② 위치벡터 ${}^A\mathbf{P}$
③ $\{B\}$ 원점의 위치 ${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$
④ **$\{B\}$ 기준 좌표 ${}^B\mathbf{P}$**
⑤ 회전행렬 ${}^A_B\mathbf{R}$
⑥ 좌표 변환 (3.5)

[표기] ${}^B\mathbf{P}$: $\{B\}$ 원점에서 같은 점 P 까지
기준 좌표계가 $\{B\}$ 이므로 $\{B\}$ 의 축 방향 성분: ${}^B\mathbf{P} = 3\,\hat{X}_B - \hat{Y}_B = (3,\ -1)$

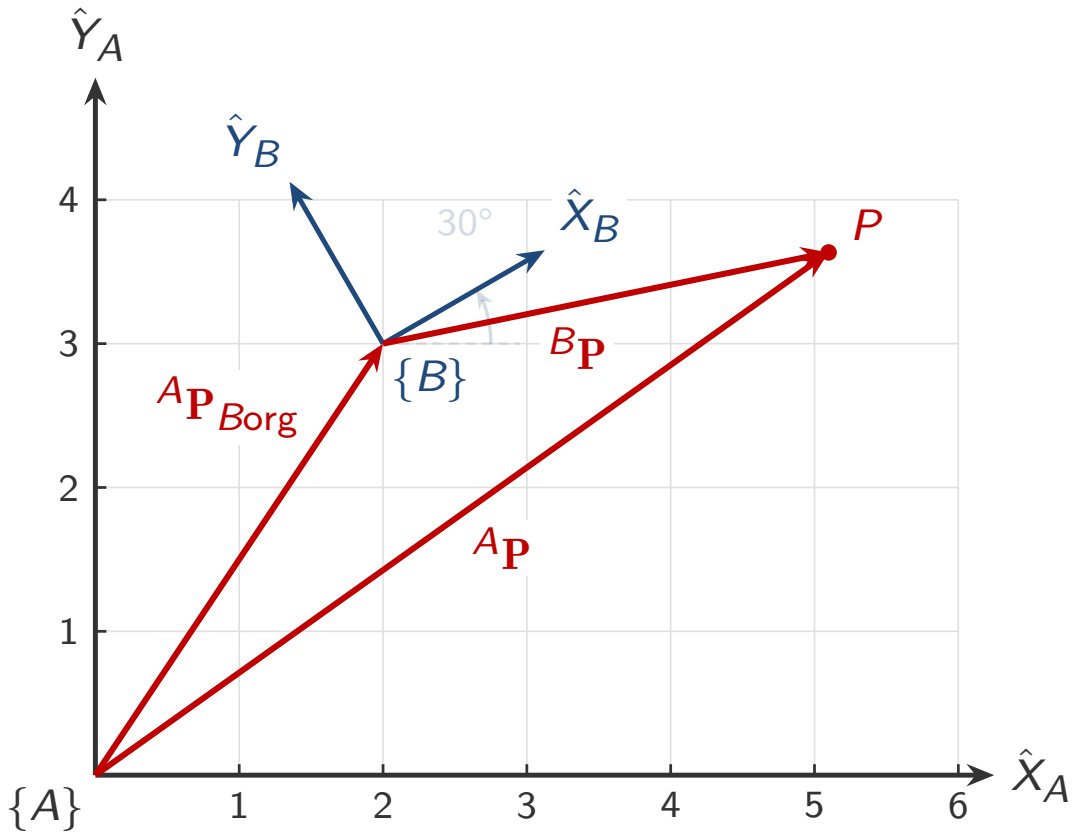
표기 다시 보기 — 회전행렬 (5/6)



① 단위벡터 $\hat{X}$, $\hat{Y}$
② 위치벡터 ${}^A\mathbf{P}$
③ $\{B\}$ 원점의 위치 ${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$
④ $\{B\}$ 기준 좌표 ${}^B\mathbf{P}$
⑤ **회전행렬 ${}^A_B\mathbf{R}$**
⑥ 좌표 변환 (3.5)

[표기] ${}^A_B\mathbf{R} = \left[{}^A\hat{X}_B \;\; {}^A\hat{Y}_B \right]$: 열 $= \{A\}$ 에서 표현한 $\{B\}$ 의 축 ($\hat{Z}_A$ 에 대해 30° 회전)
좌상첨자 A = 기준, 좌하첨자 B = 대상

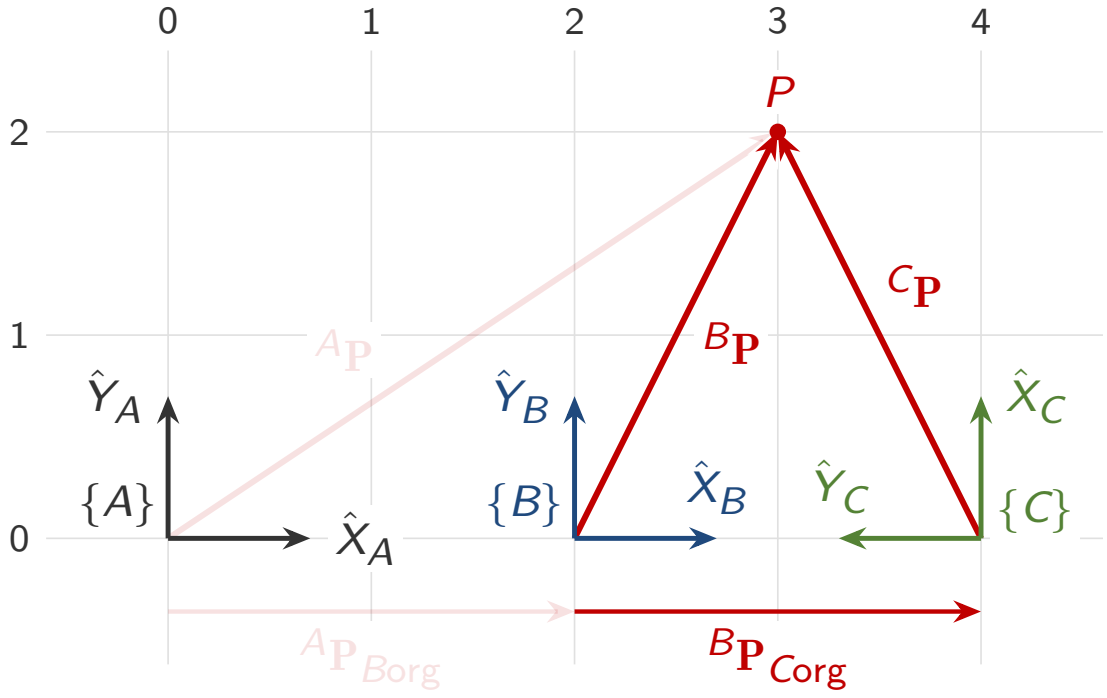
표기 다시 보기 — 좌표 변환 (6/6)



① 단위벡터 $\hat{X}$, $\hat{Y}$
② 위치벡터 ${}^A\mathbf{P}$
③ $\{B\}$ 원점의 위치 ${}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$
④ $\{B\}$ 기준 좌표 ${}^B\mathbf{P}$
⑤ 회전행렬 ${}^A_B\mathbf{R}$
⑥ **좌표 변환 (3.5)**

[직관] (3.5) ${}^A\mathbf{P} = {}^A_B\mathbf{R} \cdot {}^B\mathbf{P} + {}^A\mathbf{P}_{B\text{org}}$
곱은 축 방향의 차이를, 합은 원점의 차이를 반영한다.

곱과 합이 섞인 식 — 좌표계가 하나 더 있으면 (1/3)

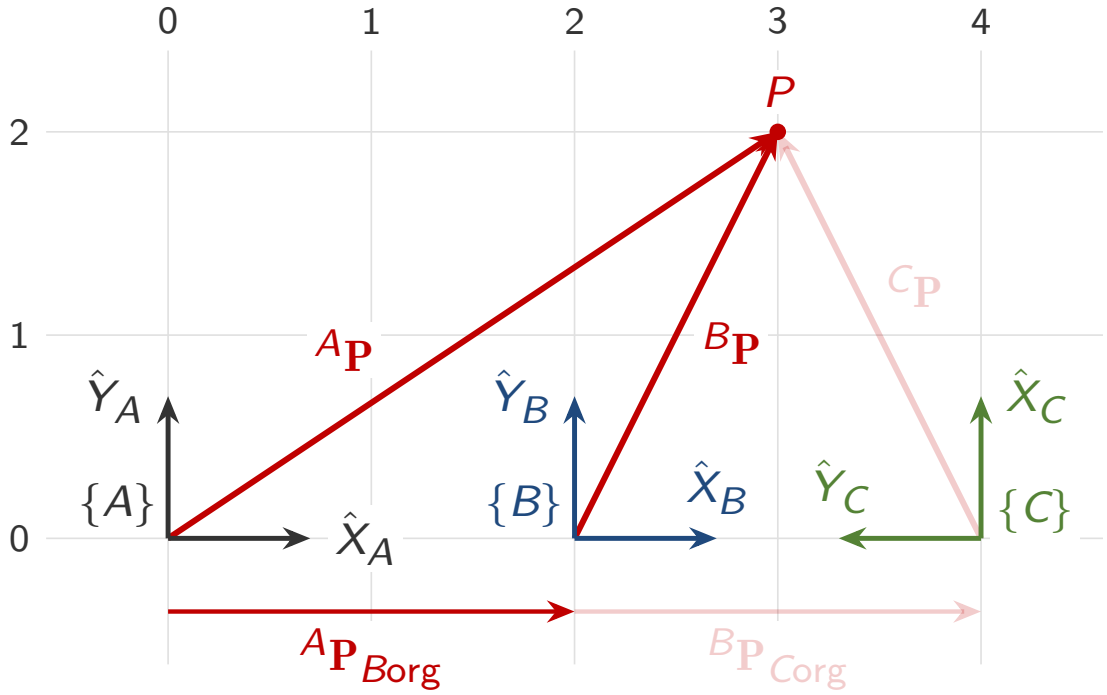


(3.5) 를 $\{B\}$, $\{C\}$ 에: $^{B}\mathbf{P} = {}^{B}_{C}\mathbf{R} \cdot {}^{C}\mathbf{P} + {}^{B}\mathbf{P}_{Corg}$ $\quad (^{C}\mathbf{P} = (2,\ 1) \ \rightarrow \ ^{B}\mathbf{P} = (1,\ 2))$

$$^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R} \cdot {}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{Borg} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\left({}^{B}_{C}\mathbf{R} \cdot {}^{C}\mathbf{P} + {}^{B}\mathbf{P}_{Corg}\right) + {}^{A}\mathbf{P}_{Borg}$$

[읽는 법] 좌표계가 하나 늘 때마다 괄호가 한 단계 중첩된다.

곱과 합이 섞인 식 — 좌표계가 하나 더 있으면 (2/3)

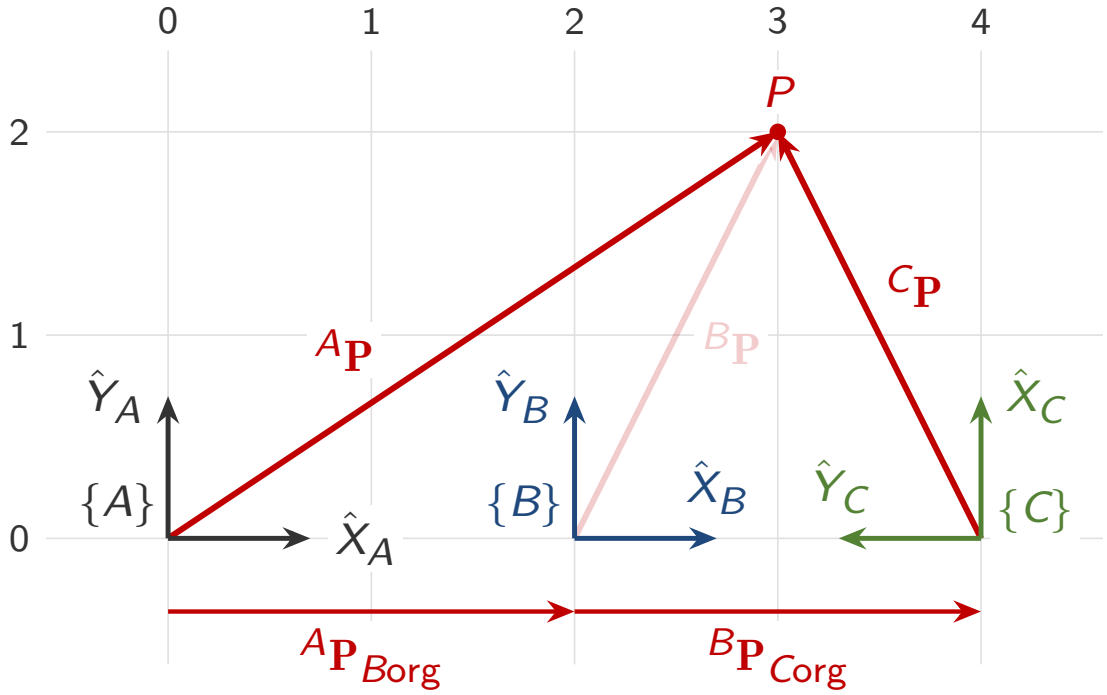


(3.5) 를 $\{B\}$, $\{C\}$ 에: $ {}^{B}\mathbf{P} = {}^{B}_{C}\mathbf{R} \cdot {}^{C}\mathbf{P} + {}^{B}\mathbf{P}_{C\text{org}} $ $ ({}^{C}\mathbf{P} = (2,\ 1) \ \rightarrow \ {}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 2)) $

$$ {}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R} \cdot {}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\left({}^{B}_{C}\mathbf{R} \cdot {}^{C}\mathbf{P} + {}^{B}\mathbf{P}_{C\text{org}}\right) + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} $$

[읽는 법] 좌표계가 하나 늘 때마다 괄호가 한 단계 중첩된다.

곱과 합이 섞인 식 — 좌표계가 하나 더 있으면 (3/3)



(3.5) 를 $\{B\}$, $\{C\}$ 에: $\quad {}^{B}\mathbf{P} = {}^{B}_{C}\mathbf{R} \cdot {}^{C}\mathbf{P} + {}^{B}\mathbf{P}_{C\text{org}} \qquad ({}^{C}\mathbf{P} = (2,\ 1) \ \rightarrow \ {}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 2))$

$$ {}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R} \cdot {}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} = {}^{A}_{B}\mathbf{R} \left({}^{B}_{C}\mathbf{R} \cdot {}^{C}\mathbf{P} + {}^{B}\mathbf{P}_{C\text{org}} \right) + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} $$

[읽는 법] 좌표계가 하나 늘 때마다 괄호가 한 단계 **중첩된다**.

동차변환행렬

CONCEPT 정의

동차 좌표(homogeneous coordinates): 마지막 성분으로 1 을 추가한 좌표

동차변환행렬 ${}^{A}_{B}T$: 회전 ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ 과 원점 위치 ${}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 를 결합한 4×4 행렬.

행렬을 선으로 나눈 부분을 **블록**이라 한다.

$$ {}^{A}_{B}T = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}\mathbf{R} & {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right], \qquad {}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}\mathbf{P} \quad (4.1) $$

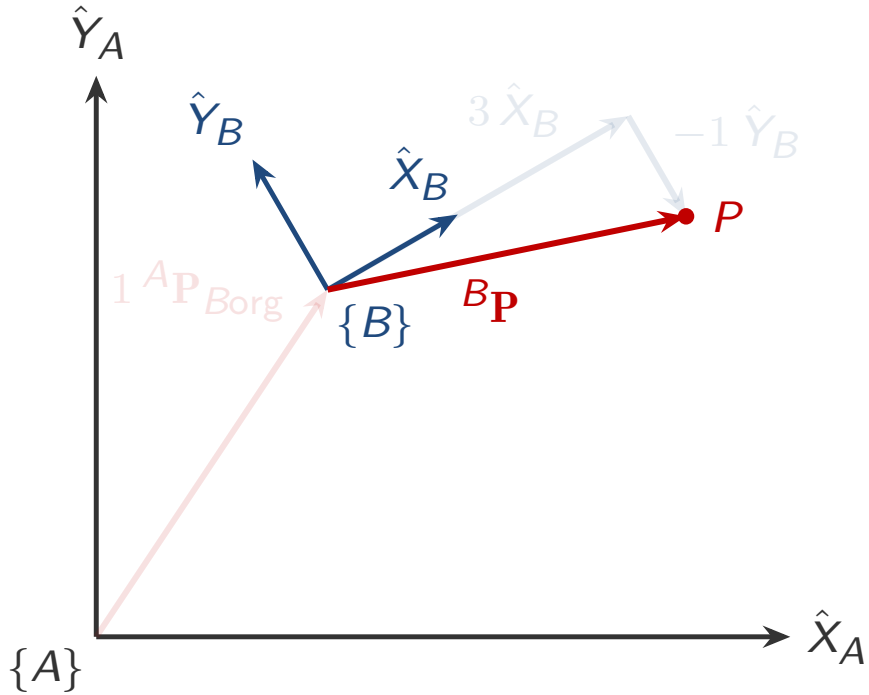
▶ **왜 그런가 — 블록 단위로 곱하면 (3.5)** ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R}\cdot{}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$

$$ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}\mathbf{R} & & {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} {}^{B}\mathbf{P} \\ \hline \mathbf{1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} {}^{A}_{B}\mathbf{R}\cdot{}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}\cdot\mathbf{1} \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} {}^{A}\mathbf{P} \\ \hline 1 \end{array}\right] $$

[직관] 끝 성분이 **0** 이면 원점 열 ${}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 가 더해지지 않아 회전만 남는다.

동차변환행렬 — 열로 보기 (1/3)

$$\left[\begin{array}{cc:c} c & -s & 2 \\ s & c & 3 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} c \\ s \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -s \\ c \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$\{B\}$: 원점 $(2,\ 3)$, $c = \cos 30^\circ$, $s = \sin 30^\circ$

${}^{B}\mathbf{P} = (3,\ -1)$, 평면이라 Z 행 · 열을 뺀 3×3

① 1 을 추가: $(3,\ -1) \rightarrow (3,\ -1,\ 1)$

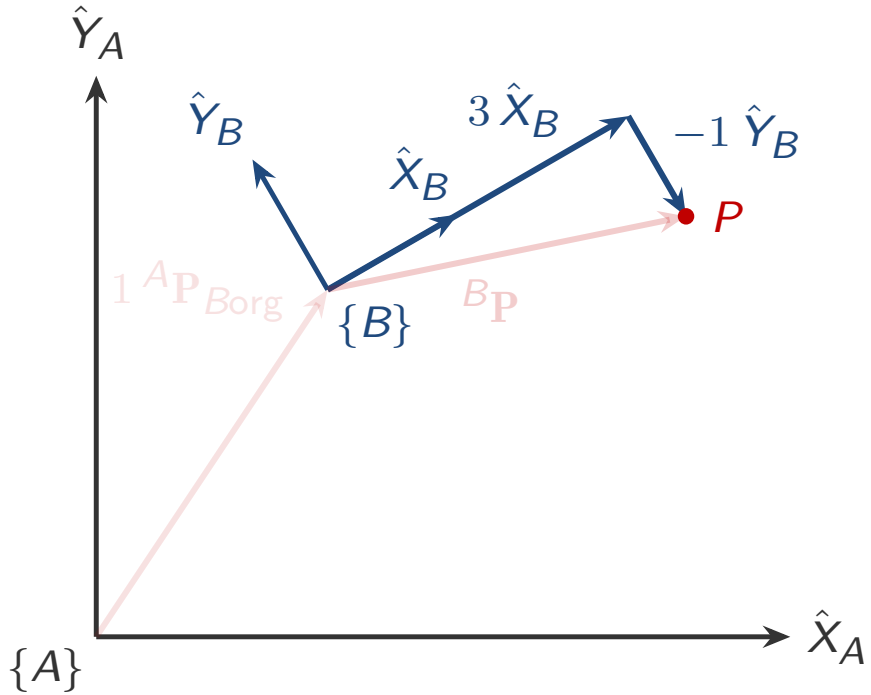
② 회전 블록: $3\,{}^{A}\hat{X}_B - 1\,{}^{A}\hat{Y}_B$

③ 원점 열: $+1\,{}^{A}\mathbf{P}_{Borg}$

[읽는 법] 끝에 1 을 추가해야 원점 열이 있는 3×3 행렬과 곱할 수 있다.

동차변환행렬 — 열로 보기 (2/3)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{-s} & 2 \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{c} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{3} \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{-s} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$\{B\}$: 원점 $(2,\ 3)$, $c = \cos 30^\circ$, $s = \sin 30^\circ$
${}^{B}\mathbf{P} = (3,\ -1)$, 평면이라 Z 행 · 열을 뺀 3×3

① 1 을 추가: $(3,\ -1) \to (3,\ -1,\ 1)$

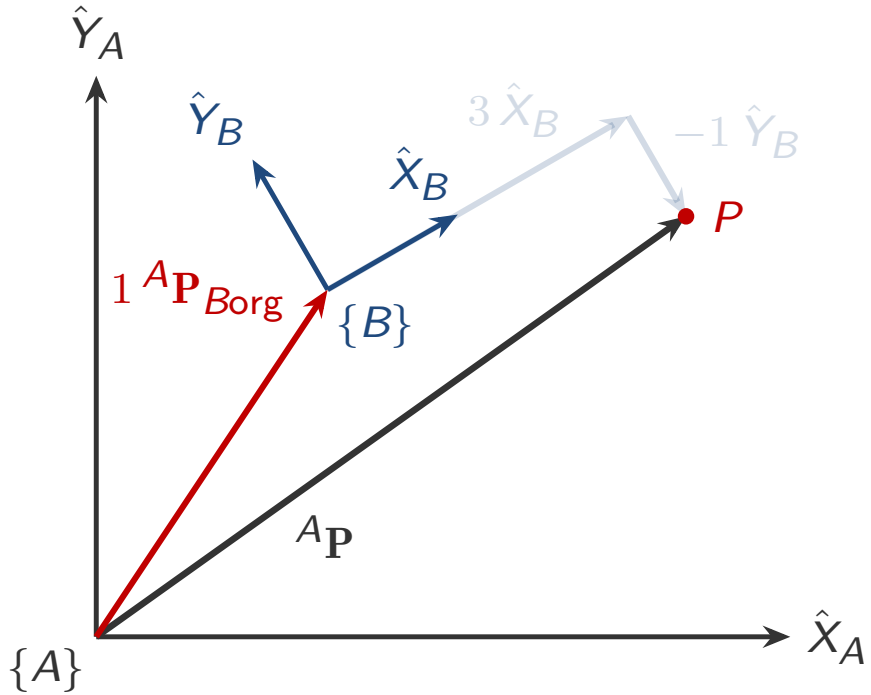
② **회전 블록: $3\,{}^{A}\hat{X}_B - 1\,{}^{A}\hat{Y}_B$**

③ 원점 열: $+1\,{}^{A}\mathbf{P}_{Borg}$

[읽는 법] 회전 블록: $(3,\ -1)$ 의 $\{A\}$ 성분 $= (3c + s,\ 3s - c) \approx (3.10,\ 0.63)$

동차변환행렬 — 열로 보기 (3/3)

$$\begin{bmatrix} c & -s & \mathbf{2} \\ s & c & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} c \\ s \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -s \\ c \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{1} \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3c+s \\ 3+3s-c \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{A}\mathbf{P}$$



$\{B\}$: 원점 $(2,\ 3)$, $c = \cos 30^\circ$, $s = \sin 30^\circ$
${}^{B}\mathbf{P} = (3,\ -1)$, 평면이라 Z 행 · 열을 뺀 3×3

① 1 을 추가: $(3,\ -1) \to (3,\ -1,\ 1)$
② 회전 블록: $3\,{}^{A}\hat{X}_B - 1\,{}^{A}\hat{Y}_B$
③ **원점 열:** $+\,1\,{}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$

[직관] 추가한 **1** 이 원점 열 $(2,\ 3)$ 을 한 번 더한다. 결과 ${}^{A}\mathbf{P} \approx (5.10,\ 3.63)$.

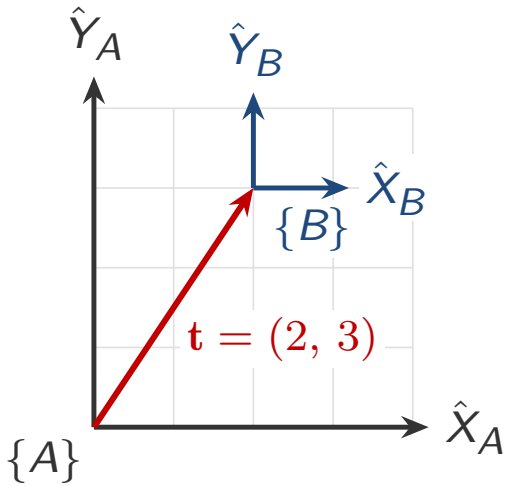
기본 동차변환행렬 — Trans 와 Rot (1/2)

CONCEPT 정의

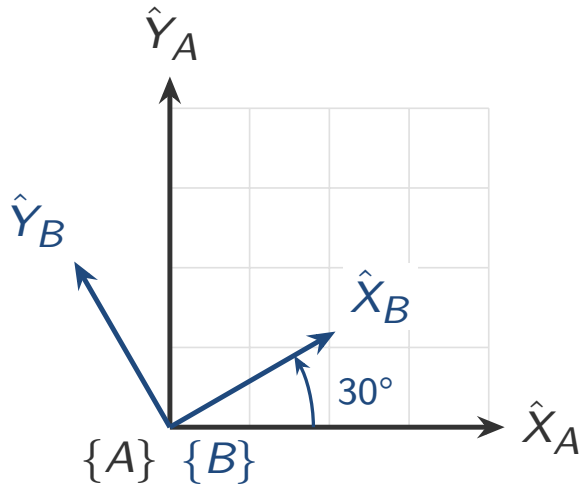
순수 병진 Trans: 원점만 이동. **순수 회전** Rot: 방향만 변경. (둘 다 4×4)

$$\mathrm{Trans}(t_x, t_y, t_z) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_3 & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right], \qquad \mathrm{Rot}(Z, \theta) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_Z(\theta) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right] \tag{4.2}$$

$\mathrm{Trans}(2, 3, 0)$: 회전 블록 $\mathbf{I}_3$



$\mathrm{Rot}(Z, 30°)$: 원점 열 $\mathbf{0}$



기본 동차변환행렬 — Trans 와 Rot 의 곱 (2/2)

RECALL 선형대수 2장

행렬의 곱은 순서를 바꾸면 일반적으로 다르다: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

▶ 왜 $[\mathbf{R}\ \ \mathbf{t}]$ 인가 — 블록 단위로 곱한다

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_3 & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_Z & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_3\mathbf{R}_Z + \mathbf{t}\,\mathbf{0}^{\mathsf{T}} & \mathbf{I}_3\mathbf{0} + \mathbf{t}\cdot 1 \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_Z + 1\cdot\mathbf{0}^{\mathsf{T}} & \mathbf{0}^{\mathsf{T}}\mathbf{0} + 1\cdot 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_Z & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{t})\,\mathrm{Rot}(Z,\theta) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_Z(\theta) & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right] \qquad (X,\ Y \text{ 축도 같은 모양}) \qquad (4.3)$$

[표기] $\mathbf{R}_X(\theta)$ 는 3×3 회전행렬, $\mathrm{Rot}(X,\theta)$ 는 이를 담은 4×4 행렬이다.

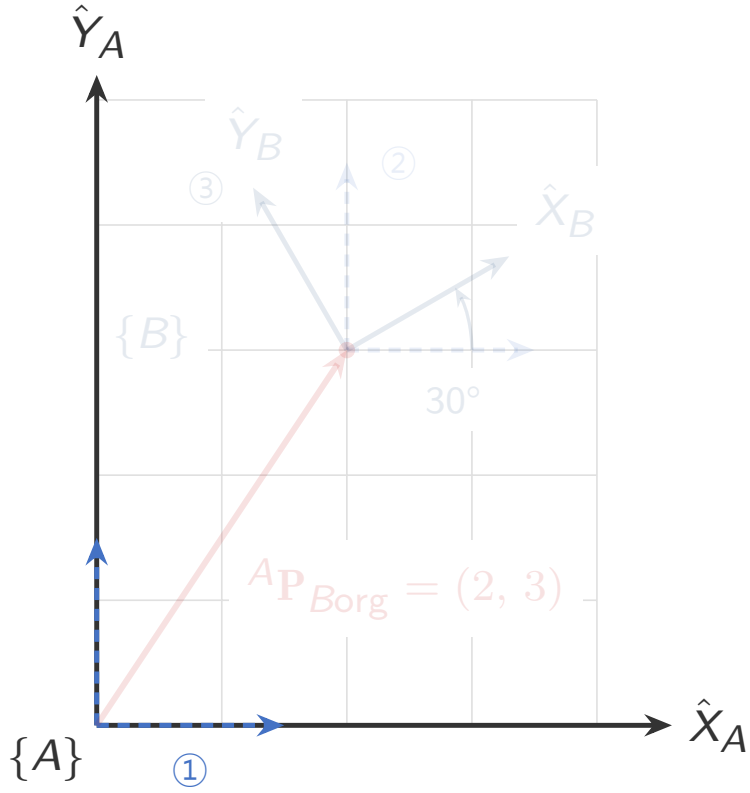
동차변환행렬의 기하학적 의미 — 병진 후 회전 (1/3)

$${}^{A}_{B}T = \mathrm{Trans}(\mathbf{t})\,\mathrm{Rot}(Z,\theta)$$

① $\{A\}$ **와 일치**: $\mathbf{I}_4$

② 원점까지 병진: $\mathrm{Trans}(2,3,0)$

③ 새 원점에서 회전: $\mathrm{Rot}(Z,30^\circ)$



[읽는 법] 처음에는 회전도 병진도 없어 ${}^{A}_{B}T = \mathbf{I}_4$ 이다.

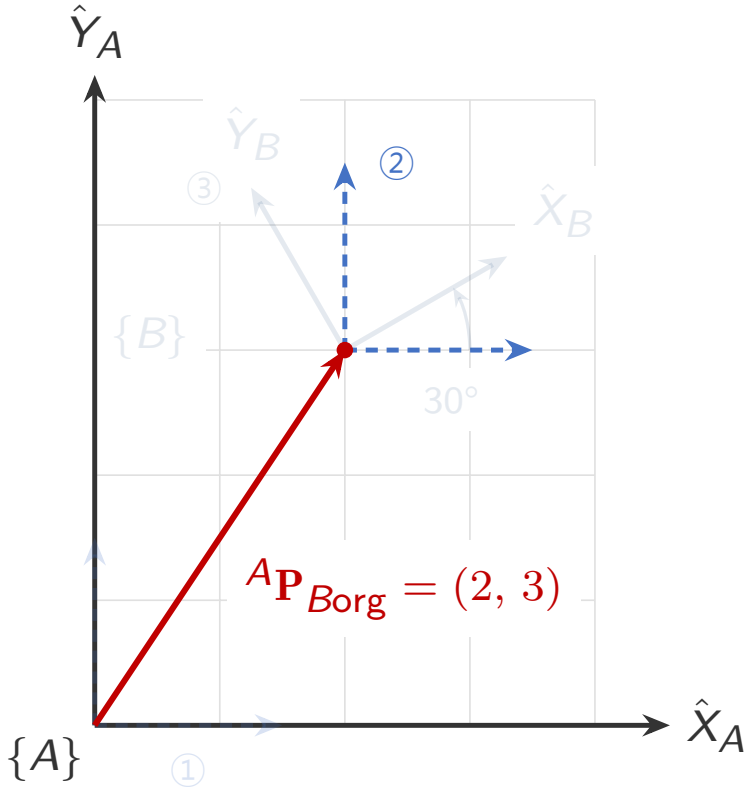
동차변환행렬의 기하학적 의미 — 병진 후 회전 (2/3)

$${}^{A}_{B}T = \mathbf{Trans(t)}\ \mathrm{Rot}(Z,\theta)$$

① $\{A\}$ 와 일치: $\mathbf{I}_4$

② **원점까지 병진**: $\mathbf{Trans(2,3,0)}$

③ 새 원점에서 회전: $\mathrm{Rot}(Z, 30°)$



[읽는 법] 방향은 그대로라 회전 블록은 $\mathbf{I}_3$, 원점 열은 $(2,\ 3,\ 0)$ 이다.

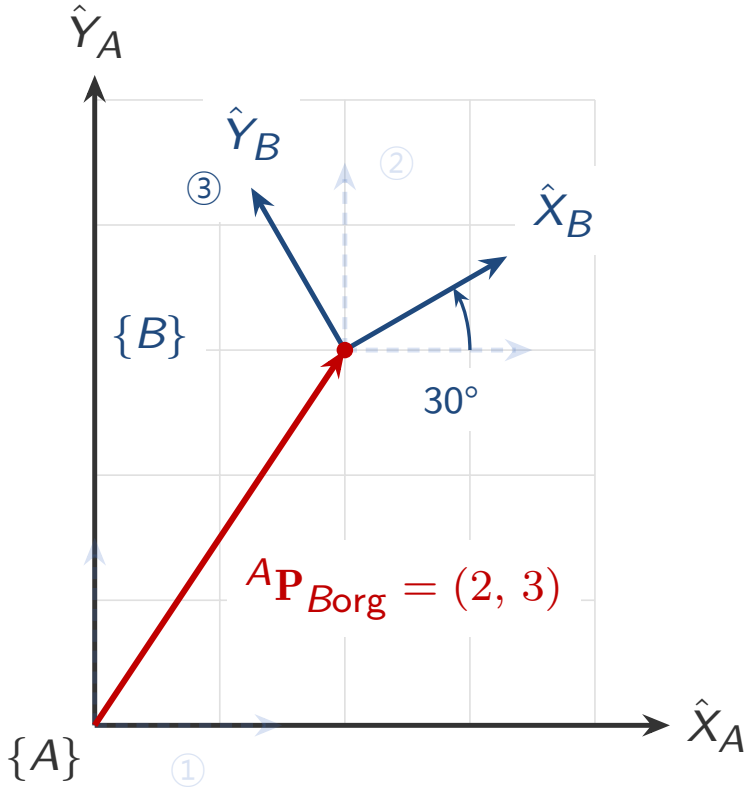
동차변환행렬의 기하학적 의미 — 병진 후 회전 (3/3)

$$ {}^{A}_{B}T = \mathrm{Trans}(\mathbf{t})\,\mathbf{Rot}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\theta}) $$

① $\{A\}$ 와 일치: $\mathbf{I}_4$

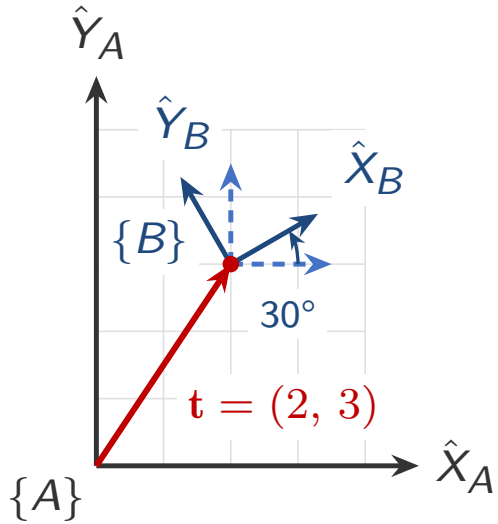
② 원점까지 병진: $\mathrm{Trans}(2, 3, 0)$

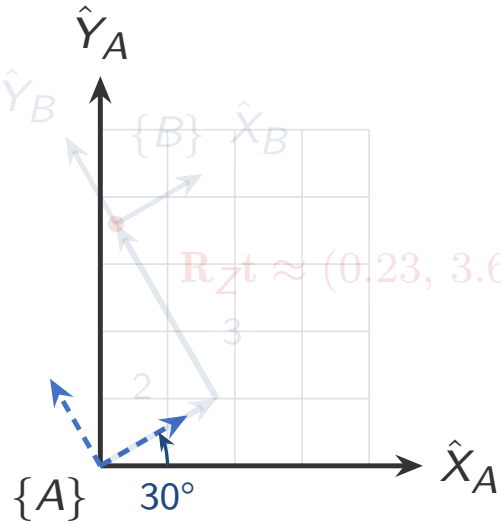
③ 새 원점에서 회전: $\mathbf{Rot}(\boldsymbol{Z}, \mathbf{30°})$



[읽는 법] ${}^{A}_{B}T = \mathbf{Trans}(\mathbf{2, 3, 0})\,\mathbf{Rot}(\boldsymbol{Z}, \mathbf{30°})$: 병진 후 새 원점에서 회전.

곱의 순서 — Trans 와 Rot 을 바꿔 곱하면 (1/2)

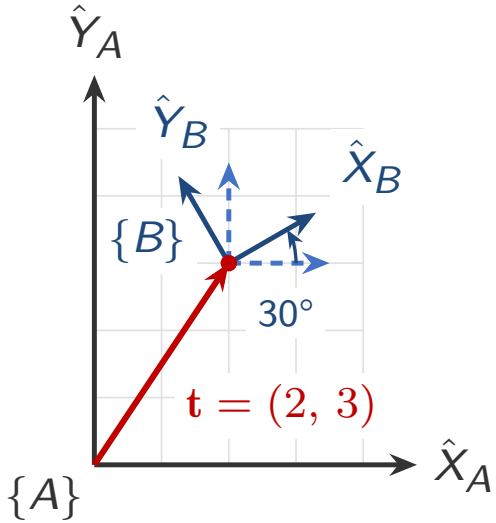


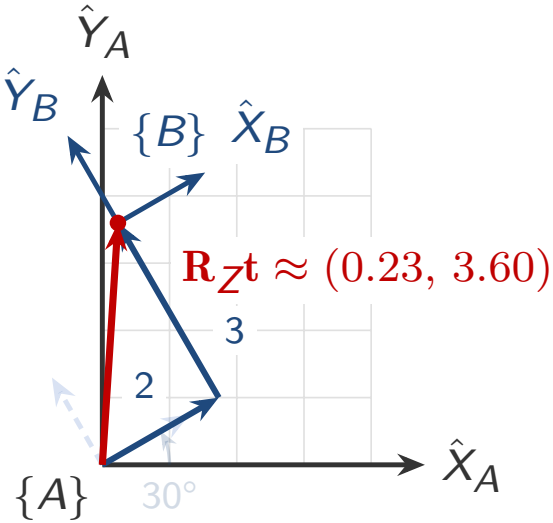


$$\mathrm{Trans}(\mathbf{t})\,\mathrm{Rot}(Z, 30^\circ) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_Z & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{array}\right], \qquad \mathrm{Rot}(Z, 30^\circ)\,\mathrm{Trans}(\mathbf{t}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_Z & \mathbf{R}_Z\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{array}\right]$$

[읽는 법] 왼쪽 행렬부터 $\{B\}$ 를 이동: 왼쪽 칸은 병진 먼저, 오른쪽 칸은 **회전 먼저**.
왼쪽 칸: 원점 $(2,\ 3)$ 까지 병진한 뒤 30° 회전.

곱의 순서 — Trans 와 Rot 을 바꿔 곱하면 (2/2)



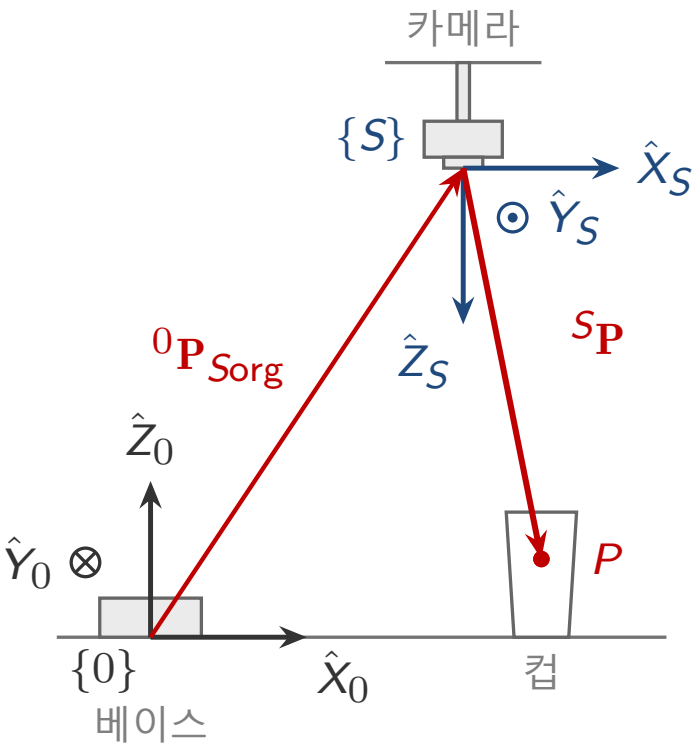


$$\mathrm{Trans}(\mathbf{t})\,\mathrm{Rot}(Z, 30^\circ) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_Z & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{array}\right], \qquad \mathrm{Rot}(Z, 30^\circ)\,\mathrm{Trans}(\mathbf{t}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_Z & \mathbf{R}_Z\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{R}_Z(30^\circ)\,\mathbf{t} = 2\,(c_{30^\circ},\ s_{30^\circ},\ 0) + 3\,(-s_{30^\circ},\ c_{30^\circ},\ 0) = (\sqrt{3} - 3/2,\ 1 + 3\sqrt{3}/2,\ 0)$$

[읽는 법] 오른쪽 칸: 회전한 축 방향으로 2, 3 병진해 원점 열이 $\mathbf{R}_Z\mathbf{t}$.
$\mathrm{Trans} \cdot \mathrm{Rot} \neq \mathrm{Rot} \cdot \mathrm{Trans}$: 회전 블록은 같고 **원점 열만** 다르다.

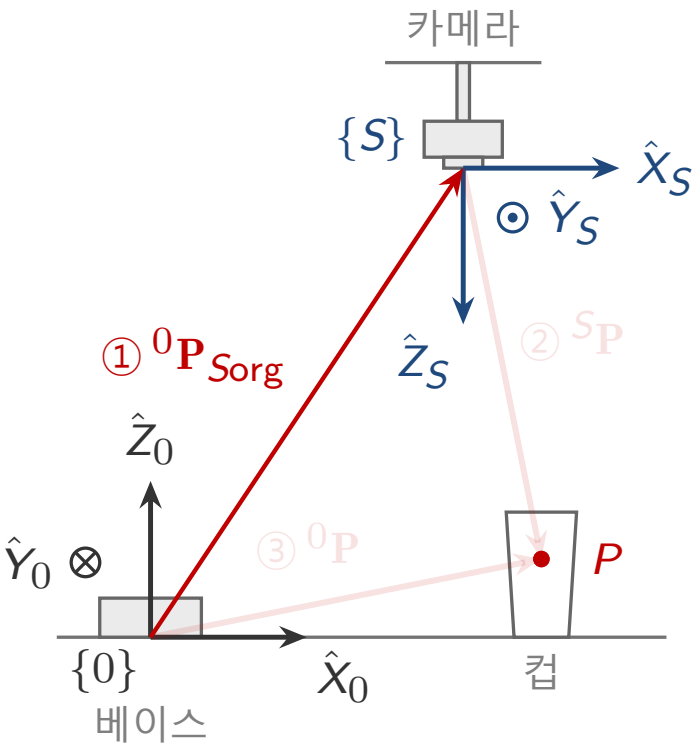
예제 4-1 카메라로 측정한 컵의 베이스 좌표 (1/4)



카메라 $\{S\}$ 는 $\{0\}$ 기준
$(0.4,\ 0,\ 0.6)$ m 에 있고
$\hat{X}_0$ 에 대해 $180°$ 회전해 있다.

카메라로 측정한 컵
${}^S\mathbf{P} = (0.1,\ 0.05,\ 0.5)$ m 를
베이스 좌표 ${}^0\mathbf{P}$ 로 변환하시오.

예제 4-1 카메라로 측정한 컵의 베이스 좌표 (2/4)



SOLUTION 4-1

① ${}^0_S\boldsymbol{T} = \mathbf{Trans}(0.4, 0, 0.6)\,\mathbf{Rot}(\boldsymbol{X}, 180°)$

② ${}^S\mathbf{P} = (0.1,\ 0.05,\ 0.5)\ \mathrm{m}$

③ ${}^0\mathbf{P} = {}^0_S T \cdot {}^S\mathbf{P}$

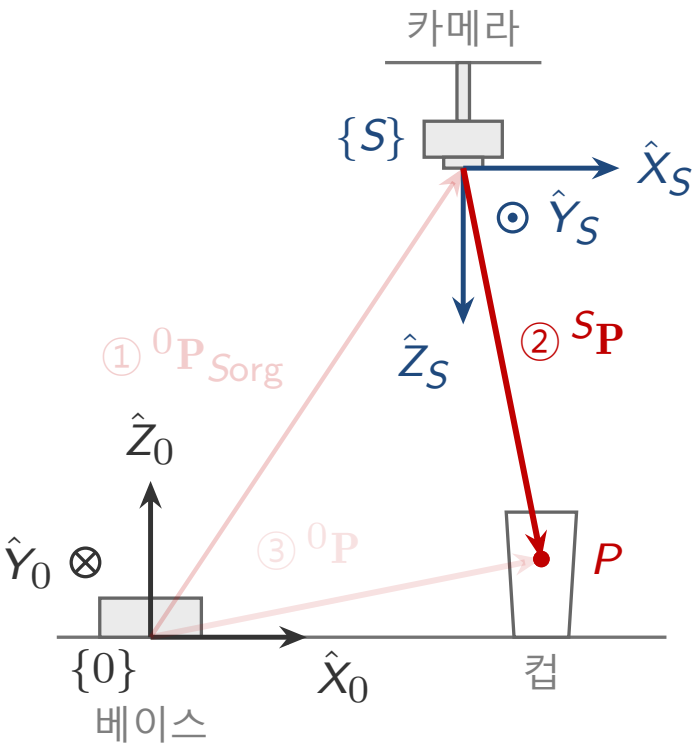
$$\mathrm{Trans}(\mathbf{t})\,\mathrm{Rot}(X,\theta) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & c_\theta & -s_\theta & t_y \\ 0 & s_\theta & c_\theta & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$ {}^0_S T = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$c_{180°} = -1,\ s_{180°} = 0$$

[읽는 법] ① $\{0\} \rightarrow \{S\}$: **원점 열** $= {}^0\mathbf{P}_{Sorg}$, $\{0\}$ 원점에서 $\{S\}$ 원점까지의 위치벡터.
회전 블록: $\hat{X}_S = \hat{X}_0$, $\hat{Y}_S \cdot \hat{Z}_S$ 는 $\hat{Y}_0 \cdot \hat{Z}_0$ 와 반대 방향($\hat{X}_0$ 에 대해 $180°$).

예제 4-1 카메라로 측정한 컵의 베이스 좌표 (3/4)



SOLUTION 4-1

① ${}^0_S T = \mathrm{Trans}(0.4, 0, 0.6)\,\mathrm{Rot}(X, 180^\circ)$

② ${}^S\mathbf{P} = (0.1,\ 0.05,\ 0.5)\ \mathbf{m}$

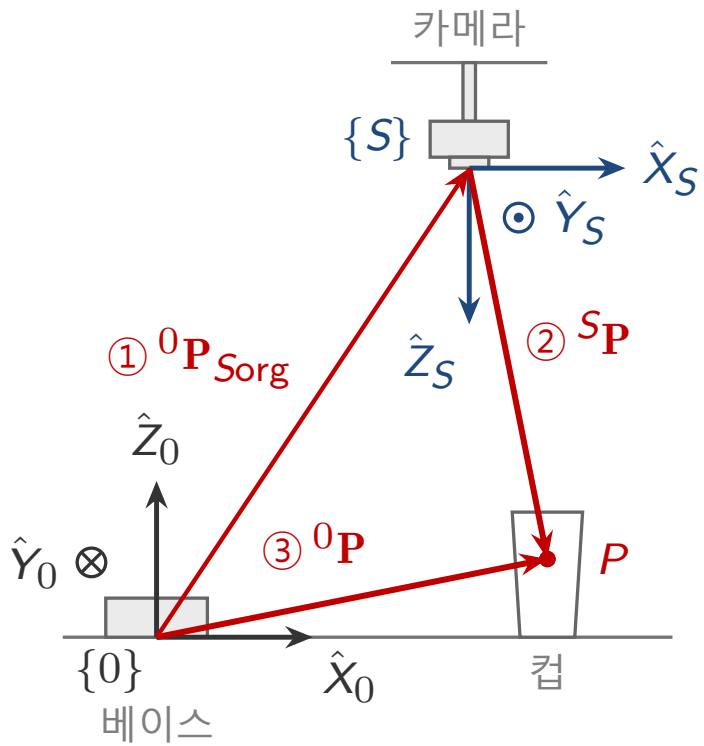
③ ${}^0\mathbf{P} = {}^0_S T \cdot {}^S\mathbf{P}$

$$(0.1,\ 0.05,\ 0.5) \longrightarrow \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \\ 0.5 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

마지막 성분으로 1 을 추가(동차 좌표)

[읽는 법] ② ${}^S\mathbf{P}$: 카메라가 측정한 $\{S\}$ 기준 좌표($\hat{X}_S$, $\hat{Y}_S$, $\hat{Z}_S$ 방향 성분).
원점 열이 있는 4×4 행렬 ${}^0_S T$ 와 곱하려면 성분이 4개여야 한다.

예제 4-1 카메라로 측정한 컵의 베이스 좌표 (4/4)



SOLUTION 4-1

① ${}^0_S T = \mathrm{Trans}(0.4, 0, 0.6)\,\mathrm{Rot}(X, 180^\circ)$

② ${}^S\mathbf{P} = (0.1,\ 0.05,\ 0.5)\ \mathrm{m}$

③ ${}^0\mathbf{P} = {}^0_S T \cdot {}^S\mathbf{P}$

$$
{}^0\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.6 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \mathbf{0.5} \\ \mathbf{-0.05} \\ \mathbf{0.1} \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow {}^0\mathbf{P} = (0.5,\ -0.05,\ 0.1)\ \mathrm{m}
$$

[읽는 법] ③ 끝 성분 1 이 원점 열을 더한다: ${}^0\mathbf{P} = {}^0_S\mathbf{R} \cdot {}^S\mathbf{P} + {}^0\mathbf{P}_{Sorg}$ (그림의 삼각형).
${}^0_S\mathbf{R} \cdot {}^S\mathbf{P} = (0.1,\ -0.05,\ -0.5)$: $\hat{Y}_S$, $\hat{Z}_S$ 가 반대 방향이라 부호만 바뀐다.

Chapter 4. 동차 변환과 기구학

4.1 동차 변환

4.2 연속 변환과 역변환

4.3 변환 방정식

4.4 절대 변환과 상대 변환

4.5 2링크 팔의 순기구학과 역기구학

[왜 필요한가] 로봇에는 베이스 · 팔 · 공구 · 카메라처럼 좌표계가 여러 개 있다. 변환을 차례로 곱해 합성하고, 반대 방향 변환은 역행렬로 구한다.

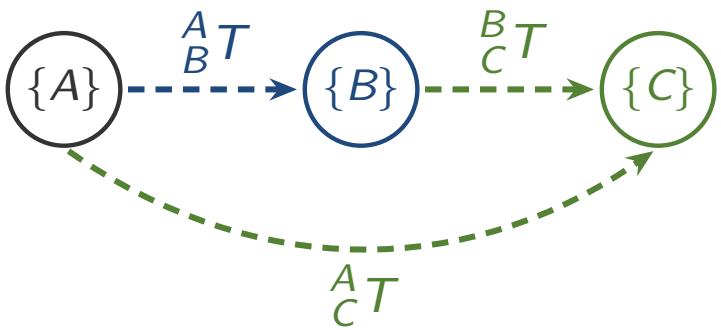
연속 변환 (1/5)

CONCEPT 정의

알려진 변환: 측정이나 설계로 값이 주어진 변환(카메라 설치 위치 등)

연속 변환: 알려진 변환을 차례로 곱해 두 좌표계 사이의 변환을 구하는 것

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T, \qquad {}^{A}_{N}T = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T \cdots {}^{N-1}_{N}T \quad (4.4) $$



RECALL 선형대수 2장

행렬 곱의 결합법칙

$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

곱의 순서만 지키면 괄호 위치는 자유롭다.

[직관] 가운데 첨자 ***B*** 가 상쇄된다: ${}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T = {}^{A}_{C}T$.

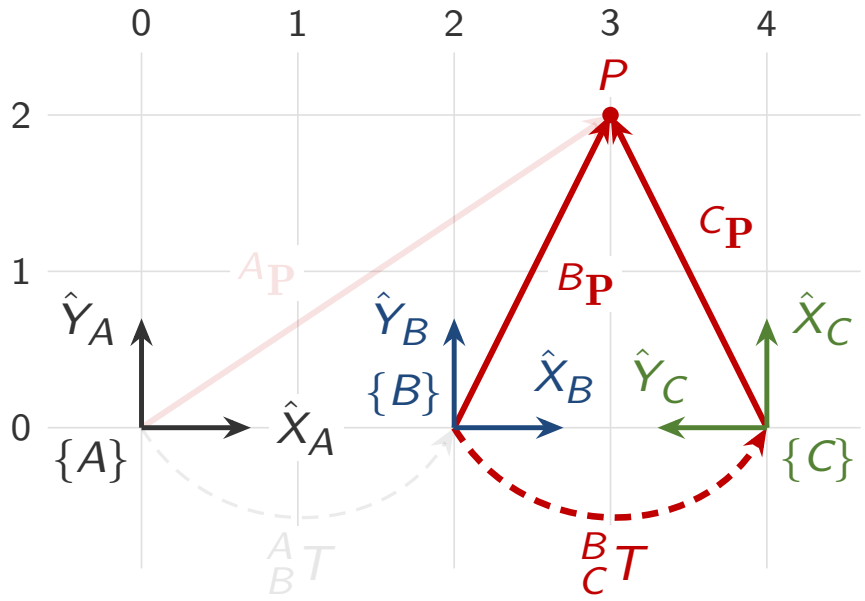
연속 변환 — 평면 세 좌표계로 보기 (2/5)

$\{B\}$: $\{A\}$ 기준 회전 없음, 원점 $(2,\ 0)$. $\{C\}$: $\{B\}$ 기준 $90°$ 회전, 원점 $(2,\ 0)$.
${}^{C}\mathbf{P} = (2,\ 1)$ 을 $\{A\}$ 기준 좌표로 변환한다.

(1) $\mathbf{{}^{B}P = {}^{B}_{C}T \cdot {}^{C}P}$

(2) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}\mathbf{P}$

(3) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T \cdot {}^{C}\mathbf{P}$
$= {}^{A}_{C}T \cdot {}^{C}\mathbf{P}$



[수치 예] (1) ${}^{B}\mathbf{P} = \mathbf{R}_Z(90°)\,(2,\ 1) + (2,\ 0) = (-1,\ 2) + (2,\ 0) = (1,\ 2)$

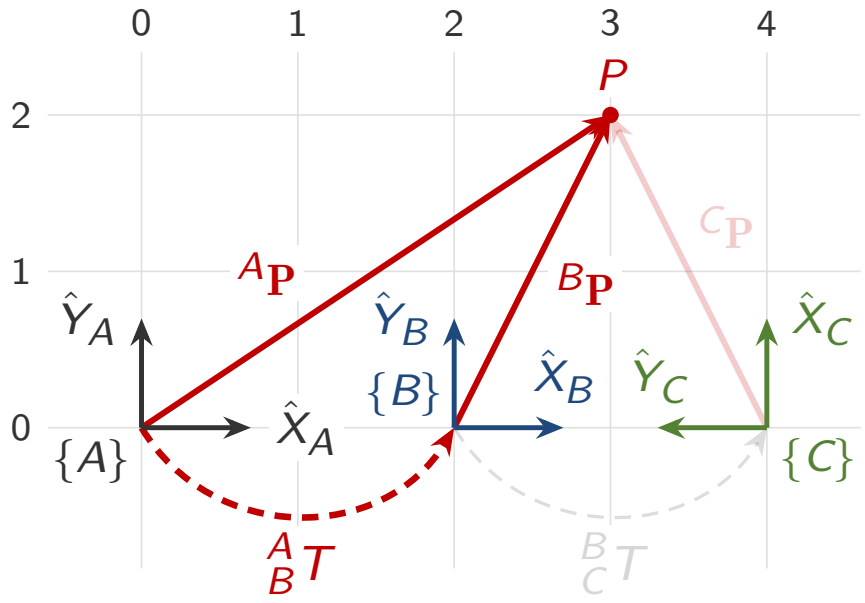
연속 변환 — 평면 세 좌표계로 보기 (3/5)

$\{B\}$: $\{A\}$ 기준 회전 없음, 원점 $(2,\ 0)$. $\{C\}$: $\{B\}$ 기준 $90°$ 회전, 원점 $(2,\ 0)$.
${}^{C}\mathbf{P} = (2,\ 1)$ 을 $\{A\}$ 기준 좌표로 변환한다.

(1) ${}^{B}\mathbf{P} = {}^{B}_{C}T \cdot {}^{C}\mathbf{P}$

(2) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{T} \cdot {}^{B}\mathbf{P}$

(3) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T \cdot {}^{C}\mathbf{P}$
$= {}^{A}_{C}T \cdot {}^{C}\mathbf{P}$



[수치 예] (2) 회전 없는 병진: ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} = (1,\ 2) + (2,\ 0) = (3,\ 2)$

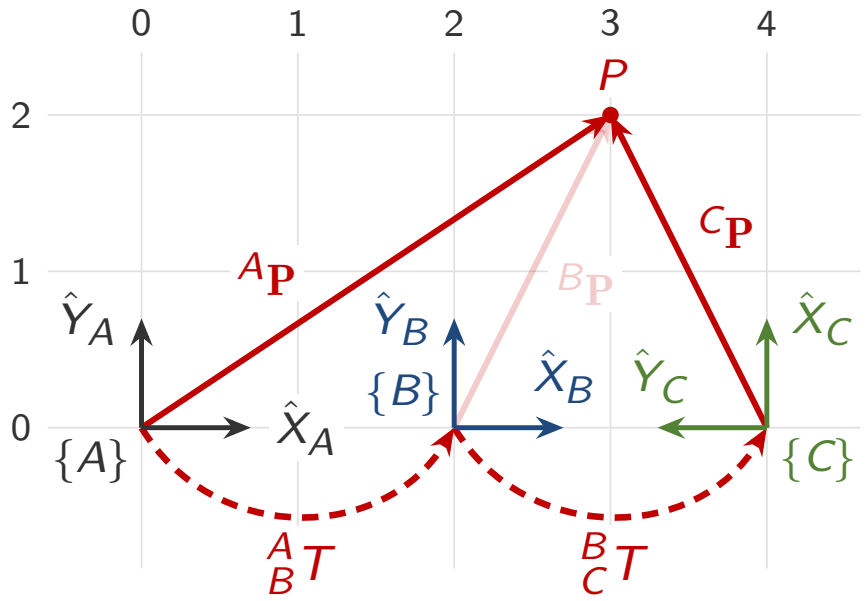
연속 변환 — 평면 세 좌표계로 보기 (4/5)

$\{B\}$: $\{A\}$ 기준 회전 없음, 원점 $(2,\ 0)$. $\{C\}$: $\{B\}$ 기준 $90°$ 회전, 원점 $(2,\ 0)$.
${}^{C}\mathbf{P} = (2,\ 1)$ 을 $\{A\}$ 기준 좌표로 변환한다.

(1) ${}^{B}\mathbf{P} = {}^{B}_{C}T \cdot {}^{C}\mathbf{P}$

(2) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}\mathbf{P}$

(3) $$\begin{aligned} {}^{A}\mathbf{P} &= {}^{A}_{B}\boldsymbol{T} \cdot {}^{B}_{C}\boldsymbol{T} \cdot {}^{C}\mathbf{P} \\ &= {}^{A}_{C}\boldsymbol{T} \cdot {}^{C}\mathbf{P} \end{aligned}$$



[직관] ${}^{A}_{C}T$ 를 한 번 구해 두면 $\{C\}$ 의 어떤 점이든 곱 한 번으로 $\{A\}$ 기준 좌표가 된다.

연속 변환 — 행렬 하나로 계산 (5/5)

같은 세 좌표계, 같은 점 ${}^{C}\mathbf{P} = (2,\ 1)$.
$\{B\}$: $\{A\}$ 기준 회전 없음, 원점 $(2,\ 0)$. $\{C\}$: $\{B\}$ 기준 90° 회전, 원점 $(2,\ 0)$.

▶ **(3) 두 변환을 먼저 곱하기 — (4.4)** ${}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T$

$$
{}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

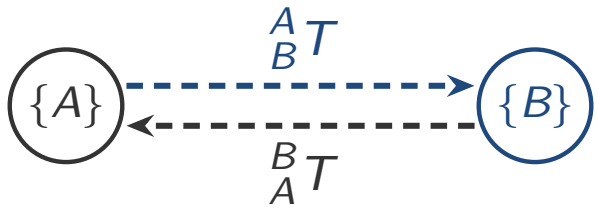
$$
{}^{A}_{C}T \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 2 - 1\cdot 1 + 4\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

[주의] 순서를 바꾼 ${}^{B}_{C}T \cdot {}^{A}_{B}T \cdot {}^{C}\mathbf{P}$ 의 결과 $(1,\ 4)$ 는 틀린 답이다.
원점 열 $(4,\ 0)$ 은 $\{A\}$ 원점에서 $\{C\}$ 원점까지의 위치벡터다.

역변환 (1/2)

CONCEPT 정의

역변환 ${}^{B}_{A}T$: ${}^{A}_{B}T$ 와 곱해 단위행렬이 되는 변환, ${}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1}$.



▶ **왜 그런가 — 반대 방향 두 화살표를 차례로 곱한다**

$$(4.4)\quad {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T \text{ 에서 } C = A: \qquad {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{A}T = {}^{A}_{A}T = \mathbf{I}_4$$

[직관] ${}^{A}_{B}T$ 는 ${}^{B}\mathbf{P}$ 를 ${}^{A}\mathbf{P}$ 로, ${}^{B}_{A}T$ 는 ${}^{A}\mathbf{P}$ 를 ${}^{B}\mathbf{P}$ 로 변환한다.
두 번 적용하면 $\{A\}$ 에서 $\{A\}$ 자신으로의 변환이라 $\mathbf{I}_4$ 이다.

역변환 (2/2)

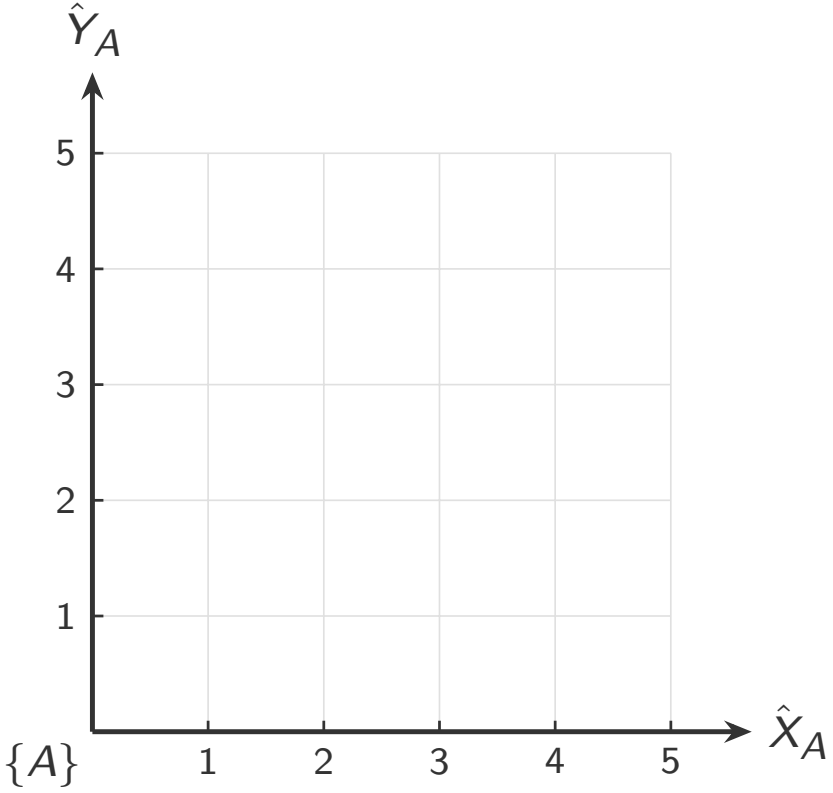
▶ **왜 그런가 — (3.5) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}\mathbf{R} \cdot {}^{B}\mathbf{P} + {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}}$ 를 ${}^{B}\mathbf{P}$ 에 대해 푼다**

$$
\begin{aligned}
{}^{A}\mathbf{P} - \mathbf{p} &= \mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} && \mathbf{R} = {}^{A}_{B}\mathbf{R},\ \mathbf{p} = {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} \text{ 로 표기} \\
\mathbf{R}^{\mathsf{T}}({}^{A}\mathbf{P} - \mathbf{p}) &= \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} && (3.8)\ \mathbf{R}^{\mathsf{T}} = \mathbf{R}^{-1}\text{: 전치행렬} = \text{역행렬} \\
{}^{B}\mathbf{P} &= \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\,{}^{A}\mathbf{P} - \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p}
\end{aligned}
$$

$$
{}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{R}^{\mathsf{T}} & -\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} \\ \hdashline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right] \qquad (4.5)
$$

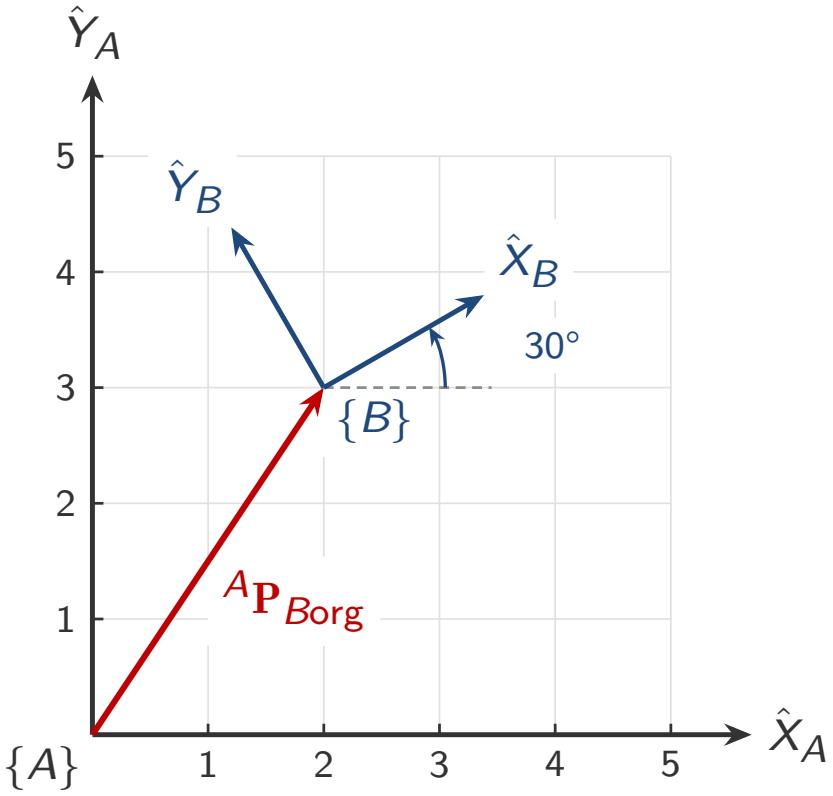
[직관] ${}^{A}\mathbf{P} = \mathbf{0}$ 이면 ${}^{B}\mathbf{P} = -\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} = {}^{B}\mathbf{P}_{A\text{org}}$: $\{B\}$ 원점에서 $\{A\}$ 원점까지의 위치벡터.

예제 4-2 $\{B\}$ 를 그리고 ${}^{A}_{B}T$, ${}^{B}_{A}T$ 구하기 (1/5)



$\{A\}$ 를 $\hat{Z}_A$ 에 대해 30° 회전하고 $\hat{X}_A$, $\hat{Y}_A$ 방향으로 2, 3 병진한 좌표계 $\{B\}$ 를 격자에 그리고 ${}^{A}_{B}T$ 와 ${}^{B}_{A}T$ 를 구하시오.

예제 4-2 $\{B\}$ 를 그리고 ${}^{A}_{B}T$, ${}^{B}_{A}T$ 구하기 (2/5)



SOLUTION 4-2

▶ **(1) 격자에 $\{B\}$ 그리기**

3.1절의 $\{B\}$(원점 $(2,\ 3)$, 30° 회전)

▶ **(2) 동차변환행렬의 두 블록**

$${}^{A}_{B}\mathbf{R} = \mathbf{R}_Z(30^\circ),\quad {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} = (2,\ 3,\ 0)$$

$${}^{A}_{B}T = \left[\begin{array}{ccc:c} c_{30^\circ} & -s_{30^\circ} & 0 & 2 \\ s_{30^\circ} & c_{30^\circ} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

[읽는 법] 첫째 열 $(\cos 30^\circ,\ \sin 30^\circ)$ 는 $\{A\}$ 에서 표현한 $\hat{X}_B$ 의 방향이다.

예제 4-2 $\{B\}$ 를 그리고 ${}^A_B T$, ${}^B_A T$ 구하기 (3/5)

SOLUTION 4-2

▶ **(3)** $\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p}$ — $\mathbf{R} = \mathbf{R}_Z(30^\circ)$, $\mathbf{p} = {}^A\mathbf{P}_{B\text{org}} = (2,\ 3,\ 0)$, $c = \cos 30^\circ$, $s = \sin 30^\circ$

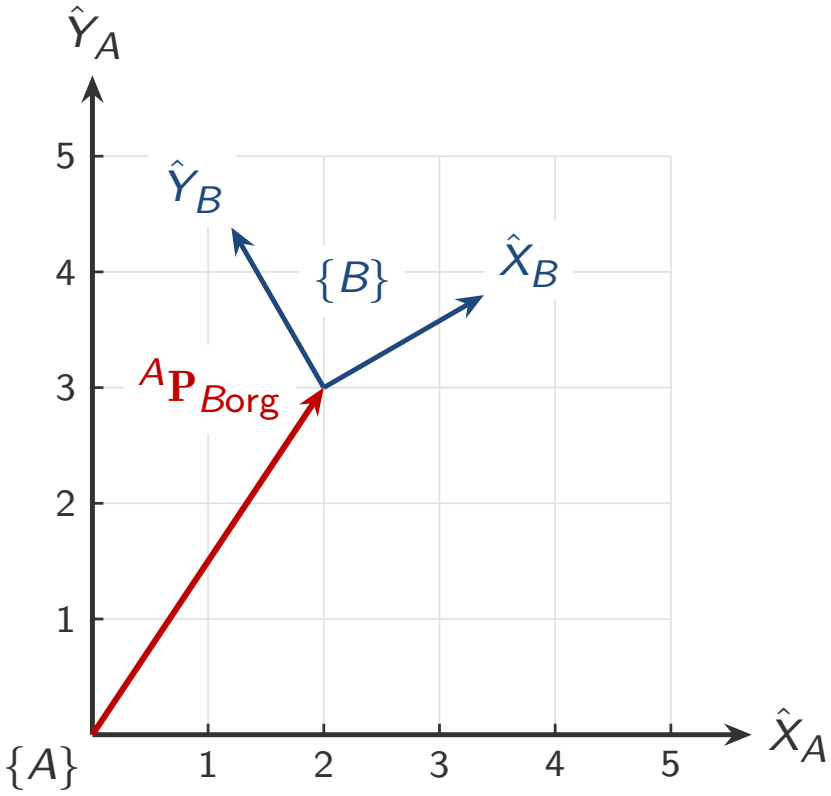
$$\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c+3s \\ 3c-2s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}+3/2 \\ 3\sqrt{3}/2-1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

▶ **(4) 역변환 (4.5)** ${}^B_A T = {}^A_B T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^{\mathsf{T}} & -\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right]$

$${}^B_A T = \left[\begin{array}{ccc|c} c & s & 0 & \mathbf{-2c-3s} \\ -s & c & 0 & \mathbf{2s-3c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad -\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} \approx (-3.23,\ -1.60,\ 0)$$

[검산] ${}^A_B T \cdot {}^B_A T = \mathbf{I}_4$ 의 $(1,4)$ 원소:
$c(-2c-3s) - s(2s-3c) + 2 = -2(c^2+s^2) + 2 = 0.$

예제 4-2 $\{B\}$ 를 그리고 ${}^{A}_{B}T$, ${}^{B}_{A}T$ 구하기 (4/5)



SOLUTION 4-2

${}^{A}_{B}T$ 의 원점 열 $\mathbf{p}$ 와 ${}^{B}_{A}T$ 의 원점 열 $-\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p}$ 를 같은 격자에서 비교한다.

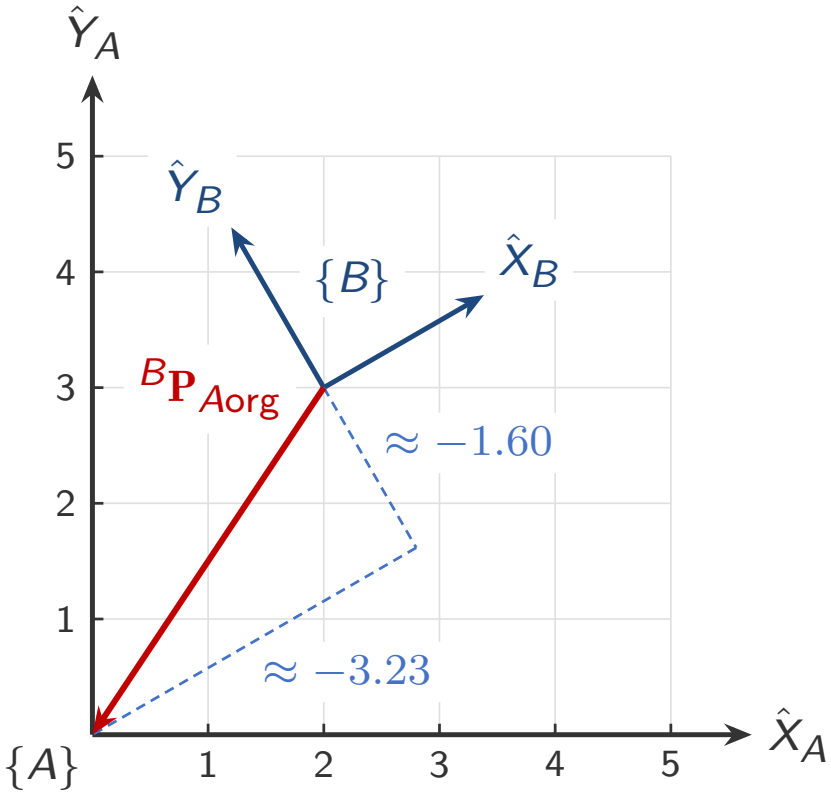
① $\mathbf{p} = {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} = (2,\ 3)$

② $-\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} = {}^{B}\mathbf{P}_{A\text{org}}$

$\approx (-3.23,\ -1.60)$

[읽는 법] $\mathbf{p}$ 는 $\{A\}$ 원점에서 $\{B\}$ 원점까지의 위치벡터, 성분은 $\{A\}$ 의 축 방향 $(2,\ 3)$.

예제 4-2 $\{B\}$ 를 그리고 ${}^{A}_{B}T$, ${}^{B}_{A}T$ 구하기 (5/5)



SOLUTION 4-2

${}^{A}_{B}T$ 의 원점 열 $\mathbf{p}$ 와 ${}^{B}_{A}T$ 의 원점 열 $-\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p}$ 를 같은 격자에서 비교한다.

① $\mathbf{p} = {}^{A}\mathbf{P}_{Borg} = (2,\ 3)$

② $-\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} = {}^{B}\mathbf{P}_{Aorg}$

$\approx (-3.23,\ -1.60)$

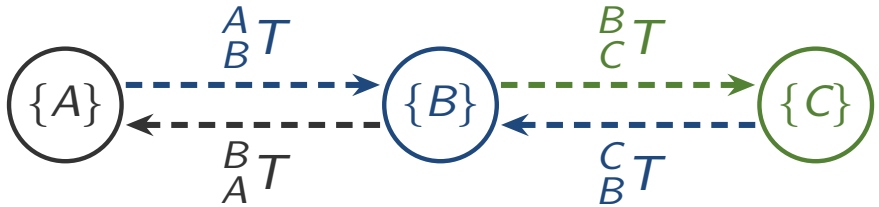
[주의] $-\mathbf{p} = (-2,\ -3)$ 도 크기가 $\sqrt{13}$ 이지만 $\{A\}$ 기준 성분이라 원점 열이 아니다.

연속 변환의 역 (1/7)

RECALL 선형대수 2장

곱의 역: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 가 가역이면 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

$$\boxed{({}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T)^{-1} = {}^{B}_{C}T^{-1} \cdot {}^{A}_{B}T^{-1} = {}^{C}_{B}T \cdot {}^{B}_{A}T} \qquad (4.6)$$



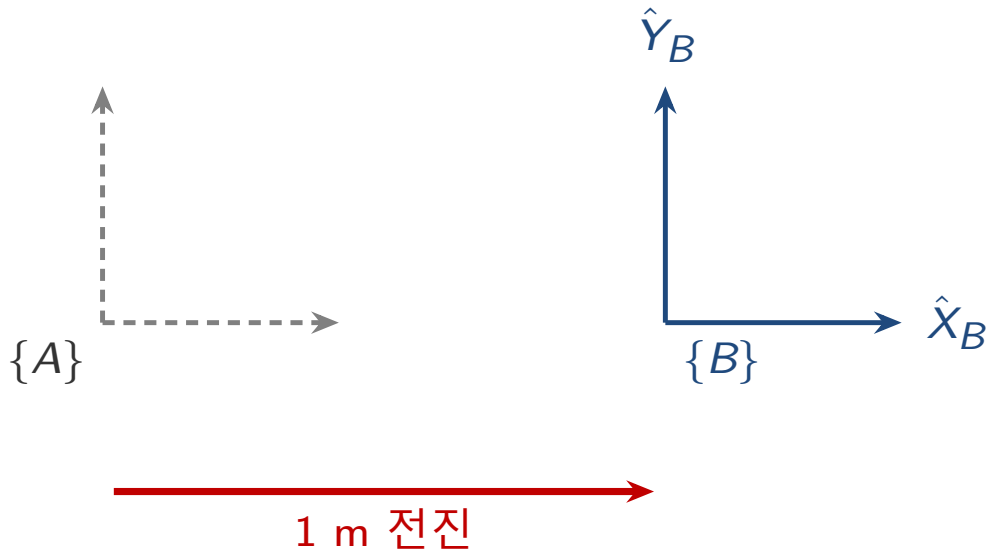
[확인] 곱하면 가운데부터 $\mathbf{I}_4$ 가 된다.

$$({}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T)({}^{C}_{B}T \cdot {}^{B}_{A}T) = {}^{A}_{B}T({}^{B}_{C}T \cdot {}^{C}_{B}T){}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{A}T = \mathbf{I}_4$$

연속 변환의 역 — 전진 · 좌회전 후 복귀 (2/7)

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T = \mathbf{Trans(1,0,0)}\ \mathrm{Rot}(Z,90^\circ) $$

$$ {}^{C}_{A}T = {}^{C}_{B}T\,{}^{B}_{A}T = \ \mathrm{Rot}(Z,-90^\circ)\ \ \mathrm{Trans}(-1,0,0) $$

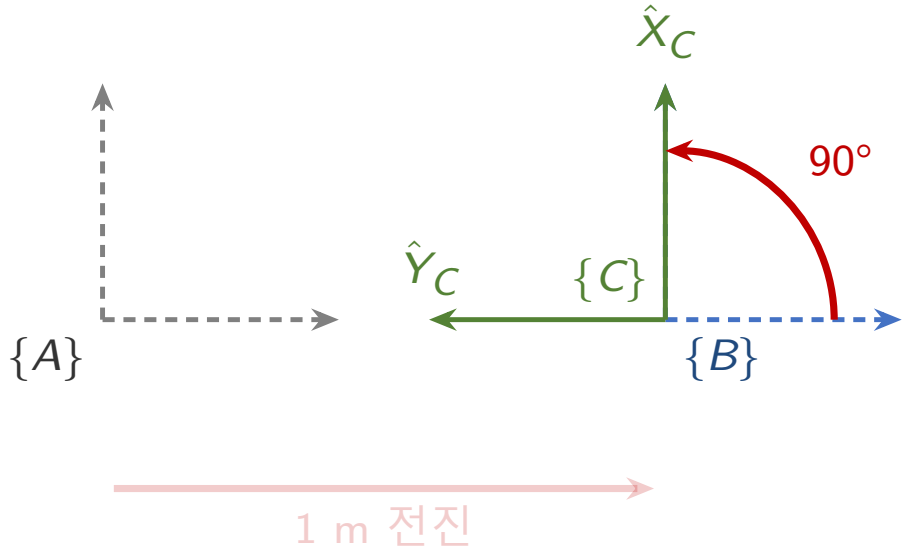


[읽는 법] 각 변환은 직전 자세 기준이다. $\{B\}$ 는 $\{A\}$ 기준, $\{C\}$ 는 $\{B\}$ 기준.

연속 변환의 역 — 전진 · 좌회전 후 복귀 (3/7)

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T = \mathrm{Trans}(1,0,0)\ \mathbf{Rot}(\boldsymbol{Z},\mathbf{90^\circ}) $$

$$ {}^{C}_{A}T = {}^{C}_{B}T\,{}^{B}_{A}T = \mathrm{Rot}(Z,-90^\circ)\ \ \mathrm{Trans}(-1,0,0) $$

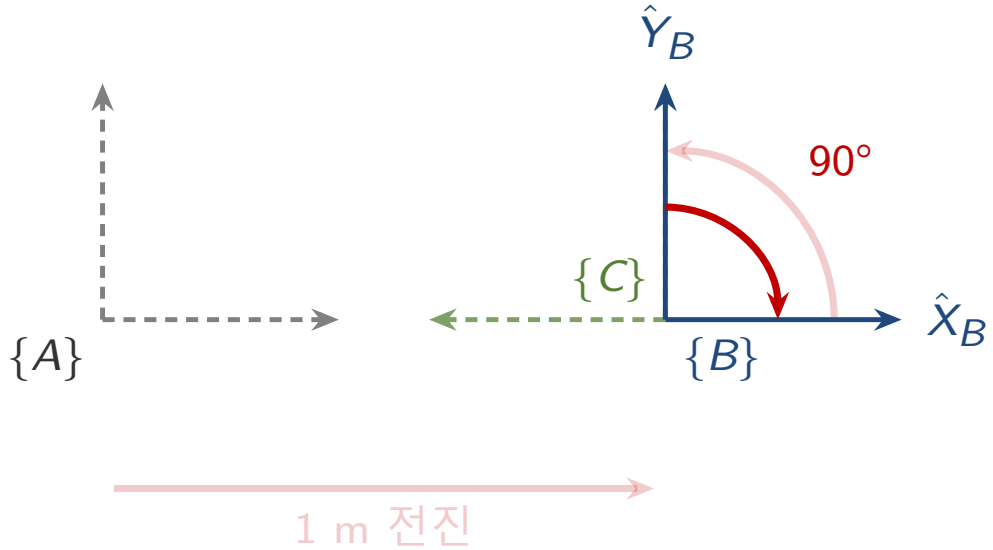


[읽는 법] ${}^{A}_{C}T$ 의 원점 열 $(1,\ 0,\ 0)$ 은 $\{A\}$ 원점에서 $\{C\}$ 원점까지의 위치벡터다.

연속 변환의 역 — 전진 · 좌회전 후 복귀 (4/7)

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T = \mathrm{Trans}(1,0,0)\ \mathrm{Rot}(Z,90^\circ) $$

$$ {}^{C}_{A}T = {}^{C}_{B}\boldsymbol{T}\,{}^{B}_{A}T = \mathbf{Rot}(\boldsymbol{Z},\mathbf{-90^\circ})\ \mathrm{Trans}(-1,0,0) $$

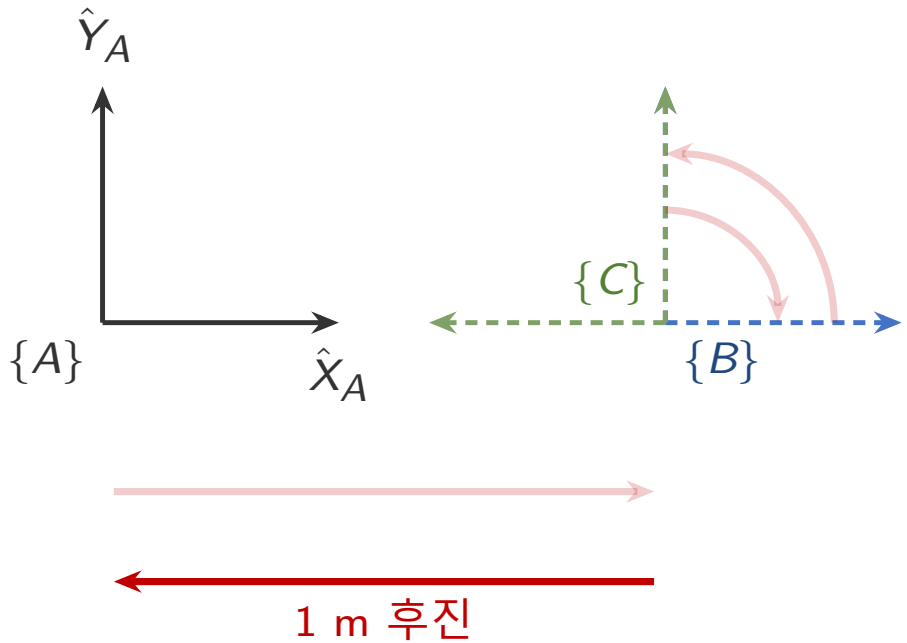


[직관] 복귀는 **마지막 동작의 역부터**: ${}^{B}_{C}T$ 의 역 $\mathrm{Rot}(Z,-90^\circ)$ 가 맨 앞에 온다.

연속 변환의 역 — 전진 · 좌회전 후 복귀 (5/7)

$$
{}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T = \mathrm{Trans}(1,0,0)\ \mathrm{Rot}(Z,90^\circ)
$$

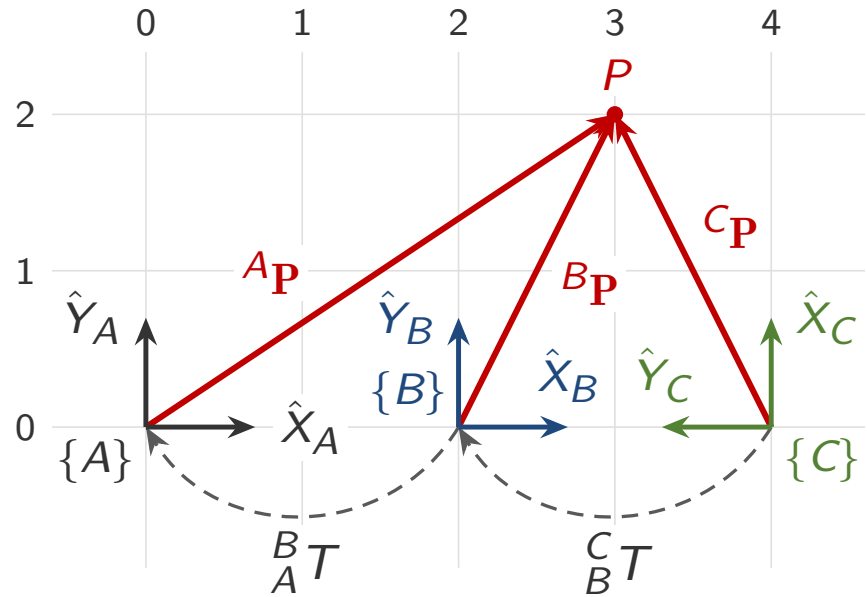
$$
{}^{C}_{A}T = {}^{C}_{B}T\,{}^{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T} = \mathrm{Rot}(Z,-90^\circ)\ \mathbf{Trans(-1,0,0)}
$$



[주의] 순서를 바꿔 1 m 후진부터 하면 $\{A\}$ 가 아닌 $(1,\ -1)$ 에 도착한다.

연속 변환의 역 — 평면 세 좌표계의 예 (6/7)

평면 세 좌표계에서 ${}^{A}\mathbf{P} = (3,\ 2)$ 를 $\{C\}$ 기준 좌표로 변환한다.
$\{B\}$: $\{A\}$ 기준 회전 없음, 원점 $(2,\ 0)$. $\{C\}$: $\{B\}$ 기준 90° 회전, 원점 $(2,\ 0)$.



[읽는 법] 알려진 변환이 모두 역방향이다. ${}^{C}\mathbf{P} = {}^{C}_{B}T \cdot {}^{B}_{A}T \cdot {}^{A}\mathbf{P}$ 는 (4.6) $({}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T)^{-1} = {}^{C}_{B}T \cdot {}^{B}_{A}T$ 의 우변과 같은 역순의 곱이다.

연속 변환의 역 — 평면 세 좌표계의 예 (7/7)

같은 세 좌표계, 같은 점 ${}^{A}\mathbf{P} = (3,\ 2)$.
$\{B\}$: $\{A\}$ 기준 회전 없음, 원점 $(2,\ 0)$. $\{C\}$: $\{B\}$ 기준 90° 회전, 원점 $(2,\ 0)$.

▶ **(1) 각 변환의 역 — (4.5)** ${}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^{\mathsf{T}} & -\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right]$

$$ {}^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad {}^{C}_{B}T = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

${}^{C}_{B}T$ 의 원점 열: $-\mathbf{R}^{\mathsf{T}}(2,\ 0) = -(0,\ -2) = (0,\ 2)$

▶ **(2) 역순의 곱 ${}^{C}_{B}T \cdot {}^{B}_{A}T$ 를 ${}^{A}\mathbf{P} = (3,\ 2)$ 에 곱한다**

$$ {}^{C}_{B}T \cdot {}^{B}_{A}T \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 3 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ -1\cdot 3 + 0\cdot 2 + 4\cdot 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} $$

[주의] 역순으로 곱하지 않은 ${}^{B}_{A}T \cdot {}^{C}_{B}T \cdot {}^{A}\mathbf{P}$ 의 결과 $(0,\ -1)$ 은 ${}^{C}\mathbf{P} = (2,\ 1)$ 과 다르다.

Chapter 4. 동차 변환과 기구학

4.1 동차 변환

4.2 연속 변환과 역변환

4.3 변환 방정식

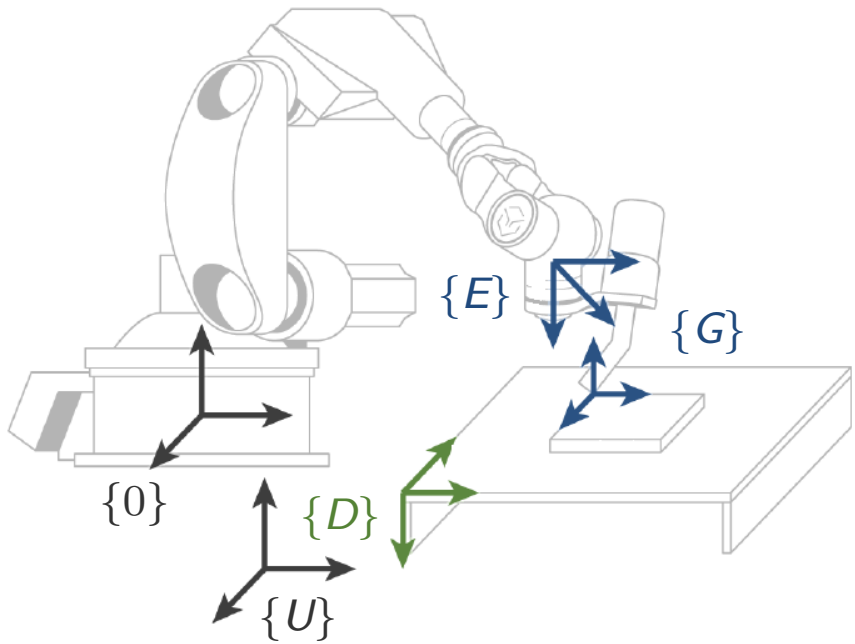
4.4 절대 변환과 상대 변환

4.5 2링크 팔의 순기구학과 역기구학

[왜 필요한가] 시작과 끝 좌표계가 같은 두 경로는 변환의 곱이 같다.
이 등식으로 미지 변환 하나(예: 베이스에 대한 말단장치의 자세 ${}^{0}_{E}T$)를 구한다.

용접 작업의 좌표계

용접 로봇 작업장에 좌표계 5개를 설정한다.
$\{U\}$ 에서 $\{G\}$ 까지 로봇을 거치는 경로와 작업대를 거치는 경로가 있다.



좌표계	$\{U\}$	$\{0\}$	$\{E\}$	$\{G\}$	$\{D\}$
이름	월드 좌표계	베이스	말단장치(팔 끝)	공구 끝(토치 끝)	작업대

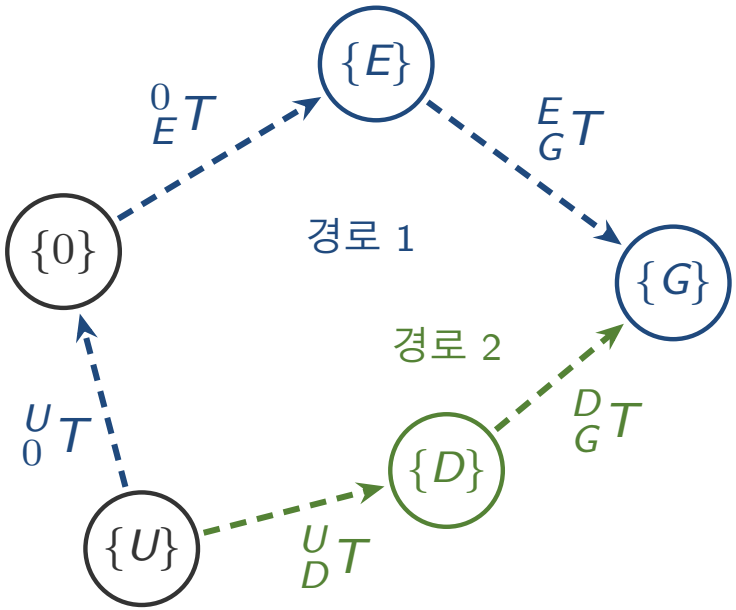
변환 그래프와 변환 방정식 (1/4)

CONCEPT 정의

변환 그래프: 좌표계는 노드, 알려진 동차변환행렬은 화살표인 그림

$\{E\}$ 에서 $\{G\}$ 로 향하는 화살표: ${}^{E}_{G}T$

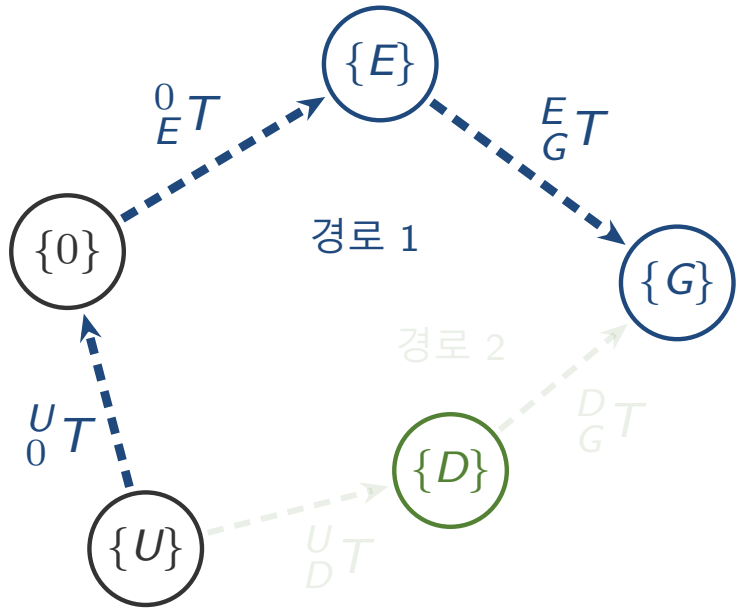
변환 방정식: 시작과 끝 좌표계가 같은 두 경로의 변환 곱이 같다는 식



변환 그래프와 변환 방정식 — 두 경로 (2/4)

경로 1: ${}^{U}_{G}T = {}^{U}_{0}T \cdot {}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T$

경로 2: ${}^{U}_{G}T = {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T$



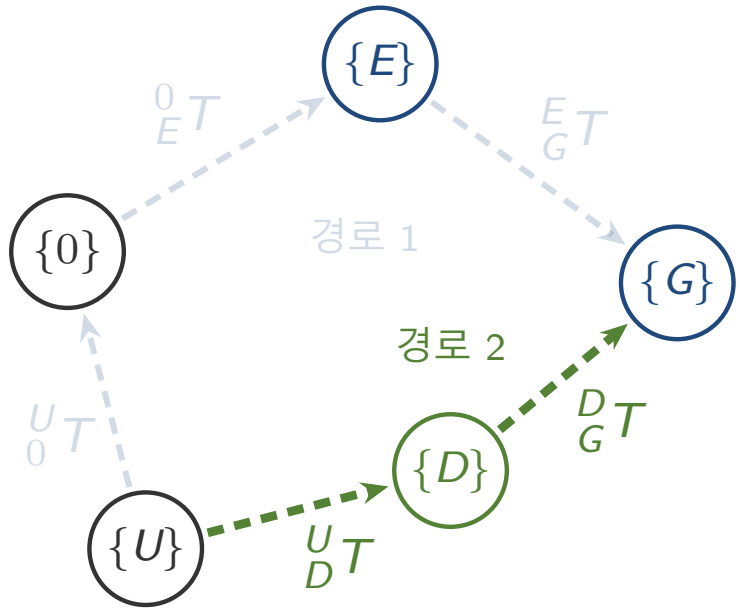
$$ {}^{U}_{0}T \cdot {}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T = {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T \qquad (4.7) $$

[읽는 법] (4.4) ${}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T$ 처럼 화살표를 지나는 순서대로 오른쪽에 곱한다.

변환 그래프와 변환 방정식 — 두 경로 (3/4)

경로 1: ${}^{U}_{G}T = {}^{U}_{0}T \cdot {}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T$

경로 2: $\boldsymbol{{}^{U}_{G}T = {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T}$



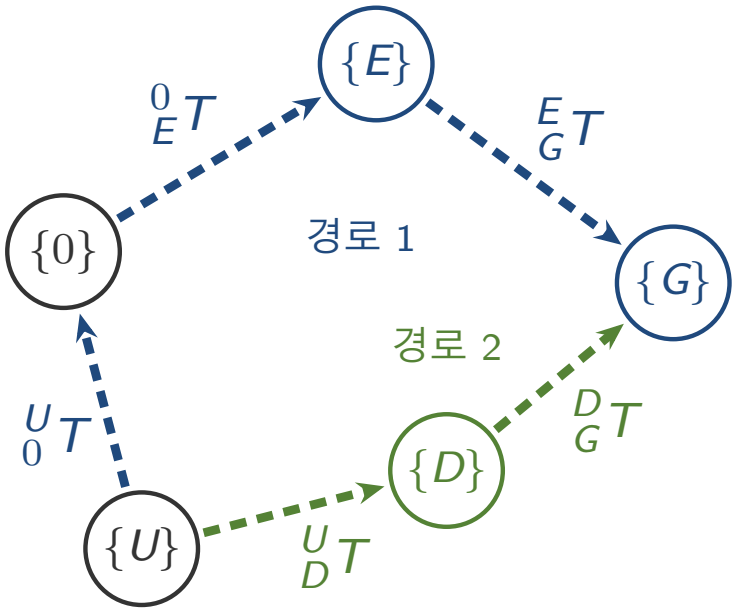
$$ {}^{U}_{0}T \cdot {}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T = {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T \qquad (4.7) $$

[읽는 법] 경로 2 도 시작이 $\{U\}$, 끝이 $\{G\}$ 라 곱은 다시 ${}^{U}_{G}T$ 이다.

변환 그래프와 변환 방정식 — 두 경로 (4/4)

경로 1: ${}^{U}_{G}T = {}^{U}_{0}T \cdot {}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T$

경로 2: ${}^{U}_{G}T = {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T$

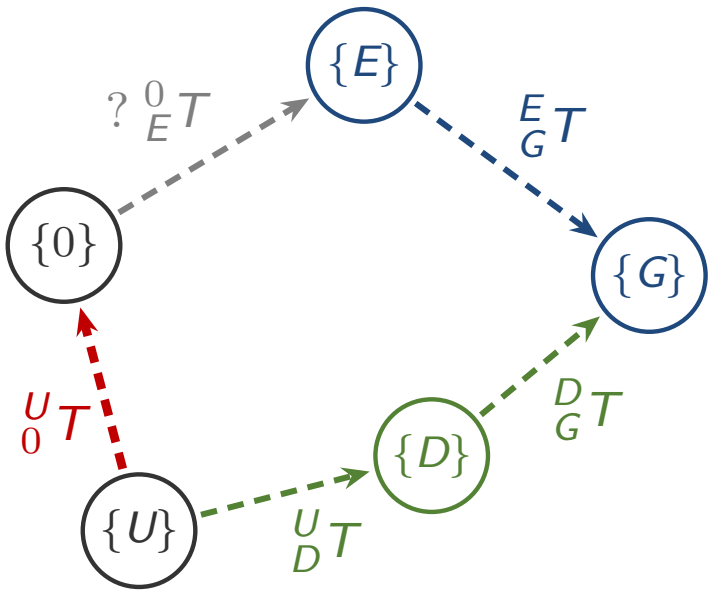


$$\boxed{{}^{U}_{0}T \cdot {}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T = {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T} \quad (4.7)$$

[직관] $\{U\}$ 에 대한 $\{G\}$ 의 **위치와 방향은 경로와 무관**하므로 두 곱은 같다.

변환 방정식의 풀이 (1/2)

(4.7) ${}^{U}_{0}T \cdot {}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T = {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T$ 에서 미지수는 로봇팔의 변환 ${}^{0}_{E}T$ 하나다.



▶ **(1) 양변 왼쪽에 ${}^{U}_{0}T^{-1}$ 을 곱한다**

$$ {}^{U}_{0}\boldsymbol{T}^{-1} \cdot {}^{U}_{0}\boldsymbol{T}\,{}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T = {}^{U}_{0}\boldsymbol{T}^{-1}\,{}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T $$

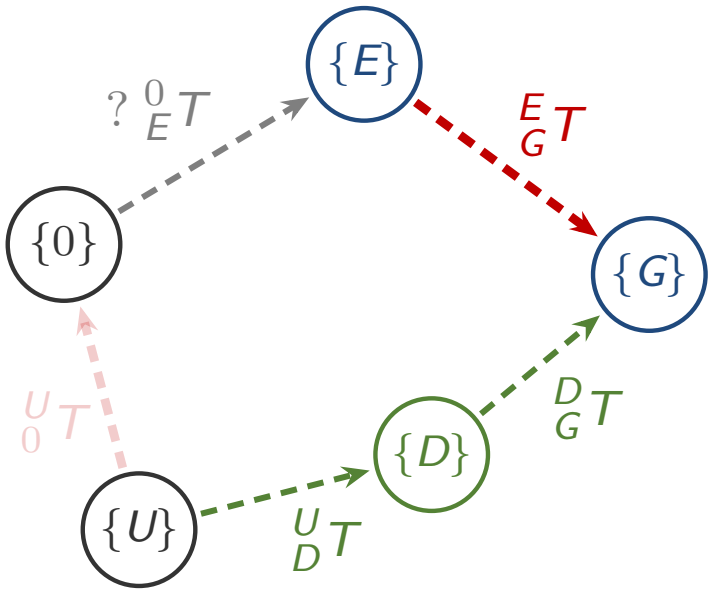
${}^{U}_{0}T^{-1} \cdot {}^{U}_{0}T = \mathbf{I}_4$ 라 좌변의 ${}^{U}_{0}T$ 가 소거된다.

$$ {}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T = {}^{U}_{0}T^{-1} \cdot {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T $$

[주의] ${}^{U}_{0}T^{-1}$ 을 우변의 오른쪽에 곱하면 결과가 다르다. 양변의 같은 쪽에 곱한다.

변환 방정식의 풀이 (2/2)

(4.7) ${}^{U}_{0}T \cdot {}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T = {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T$ 에서 미지수는 로봇팔의 변환 ${}^{0}_{E}T$ 하나다.



▶ **(2) 양변 오른쪽에 ${}^{E}_{G}T^{-1}$ 을 곱한다**

$${}^{0}_{E}T\,{}^{E}_{G}T \cdot {}^{E}_{G}T^{-1} = {}^{U}_{0}T^{-1} \cdot {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T\,{}^{E}_{G}T^{-1}$$

${}^{E}_{G}T \cdot {}^{E}_{G}T^{-1} = \mathbf{I}_4$ 라 좌변에 ${}^{0}_{E}T$ 만 남는다.

$$\boxed{{}^{0}_{E}T = {}^{U}_{0}T^{-1} \cdot {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T \cdot {}^{E}_{G}T^{-1}}$$

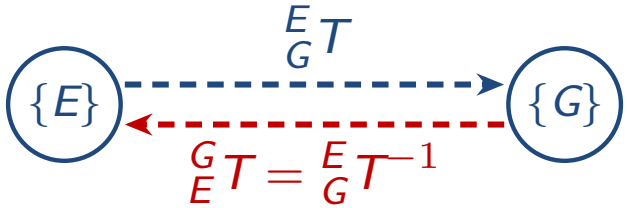
[읽는 법] 결과는 $\{0\}$ 에서 $\{U\}$, $\{D\}$, $\{G\}$ 를 거쳐 $\{E\}$ 로 가는 경로의 곱이다.

화살표를 역방향으로 지날 때 (1/5)

CONCEPT 성질

화살표 방향으로 지나면 그 변환을, 역방향으로 지나면 그 역행렬을 곱한다.

▶ **왜 그런가 — 역변환 (4.5) ${}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1}$ 에서 $A = E$, $B = G$**



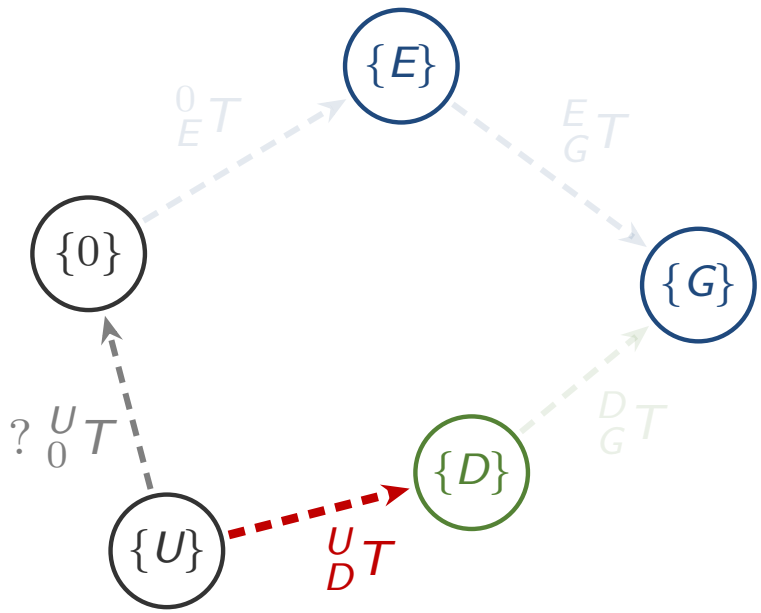
빨강 = 지금 지나는 화살표, 옆의 빨간 점선 = 역방향, 회색 = 미지 변환

[읽는 법] 그래프에 없는 $\{G\}$ 에서 $\{E\}$ 로의 변환도 역행렬로 구한다.

화살표를 역방향으로 지날 때 — $\{U\}$ 에서 $\{0\}$ 까지 (2/5)

알려진 ${}^{0}_{E}T$ 로 미지 변환 ${}^{U}_{0}T$(월드에 놓인 로봇 베이스의 자세)를 구한다.
지나는 순서: $\{U\}$, $\{D\}$, $\{G\}$, $\{E\}$, $\{0\}$.

$$ {}^{U}_{0}T = {}^{U}_{D}T\,{}^{D}_{G}T\,{}^{E}_{G}T^{-1}\,{}^{0}_{E}T^{-1} $$

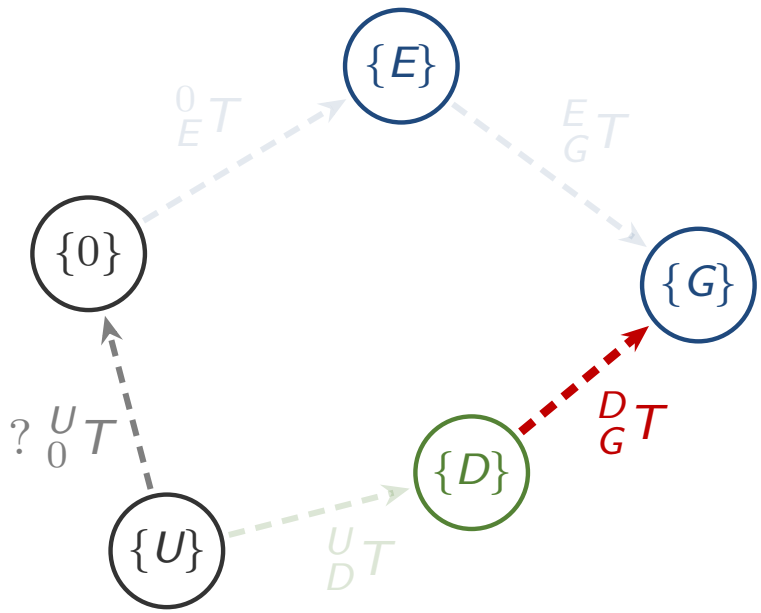


[읽는 법] 화살표 방향으로 지나므로 ${}^{U}_{D}T$ 를 그대로 곱한다.

화살표를 역방향으로 지날 때 — $\{U\}$ 에서 $\{0\}$ 까지 (3/5)

알려진 ${}^{0}_{E}T$ 로 미지 변환 ${}^{U}_{0}T$(월드에 놓인 로봇 베이스의 자세)를 구한다.
지나는 순서: $\{U\}$, $\{D\}$, $\{G\}$, $\{E\}$, $\{0\}$.

$$ {}^{U}_{0}T = {}^{U}_{D}T\,{}^{D}_{G}T\,{}^{E}_{G}T^{-1}\,{}^{0}_{E}T^{-1} $$

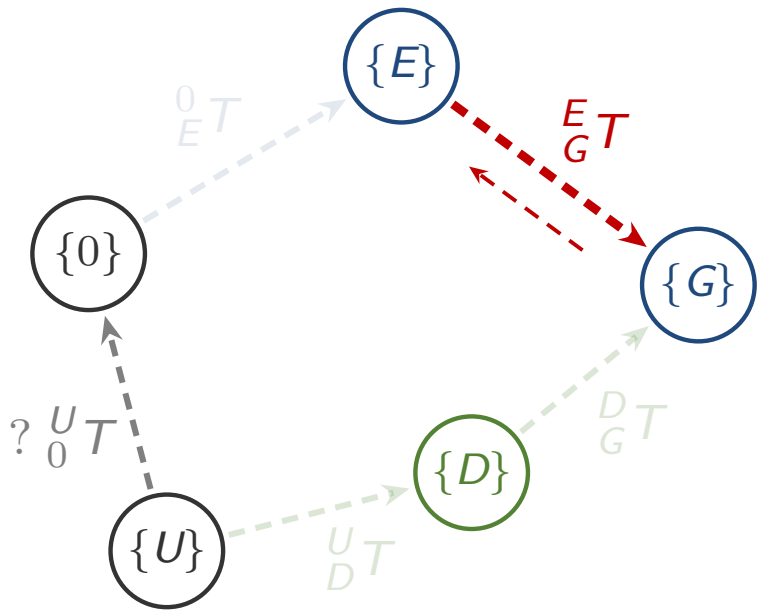


[읽는 법] 여기까지의 곱 ${}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T$ 는 경로 2 의 ${}^{U}_{G}T$ 이다.

화살표를 역방향으로 지날 때 — $\{U\}$ 에서 $\{0\}$ 까지 (4/5)

알려진 ${}^{0}_{E}T$ 로 미지 변환 ${}^{U}_{0}T$(월드에 놓인 로봇 베이스의 자세)를 구한다.
지나는 순서: $\{U\}$, $\{D\}$, $\{G\}$, $\{E\}$, $\{0\}$.

$$ {}^{U}_{0}T = {}^{U}_{D}T\,{}^{D}_{G}T\,{}^{E}_{G}T^{-1}\,{}^{0}_{E}T^{-1} $$

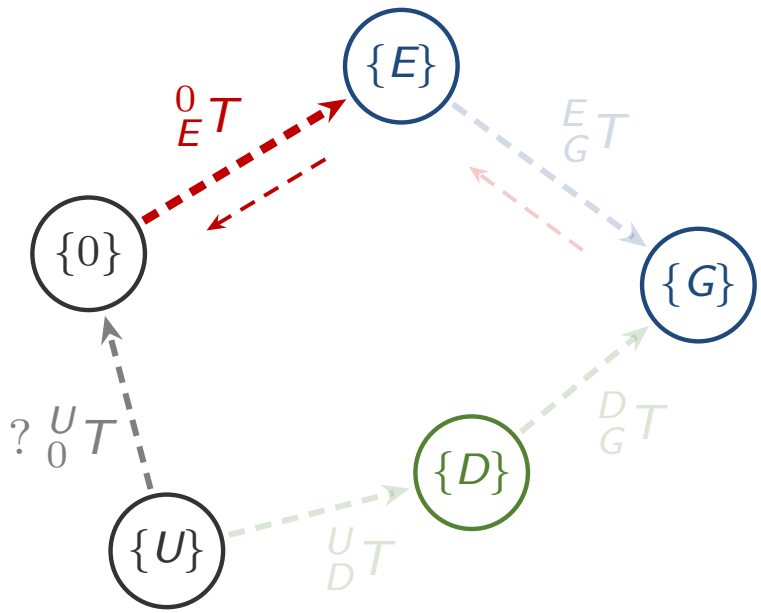


[직관] $\{E\}$ 에서 $\{G\}$ 로 향하는 화살표를 **역방향**으로 지나므로 ${}^{E}_{G}T^{-1}$ 을 곱한다.

화살표를 역방향으로 지날 때 — $\{U\}$ 에서 $\{0\}$ 까지 (5/5)

알려진 ${}^{0}_{E}T$ 로 미지 변환 ${}^{U}_{0}T$(월드에 놓인 로봇 베이스의 자세)를 구한다.
지나는 순서: $\{U\}$, $\{D\}$, $\{G\}$, $\{E\}$, $\{0\}$.

$$ {}^{U}_{0}T = {}^{U}_{D}T\,{}^{D}_{G}T\,{}^{E}_{G}T^{-1}\,{}^{0}_{E}\boldsymbol{T^{-1}} $$



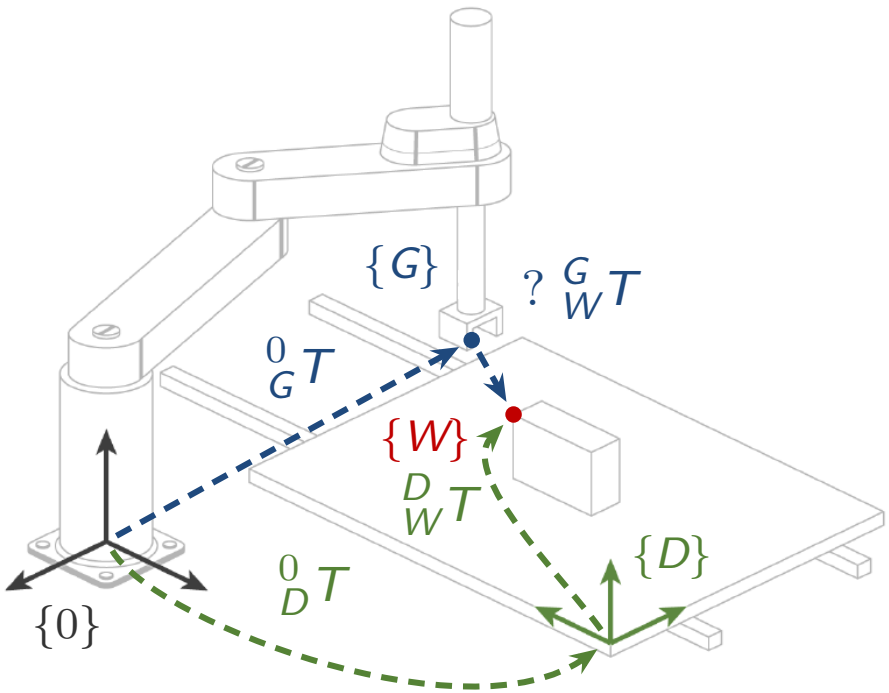
[직관] $\{0\}$ 에서 $\{E\}$ 로 향하는 화살표도 **역방향**으로 지나므로 ${}^{0}_{E}T^{-1}$ 을 곱한다.

예제 4-3 SCARA 가 작업대 위 물체를 집으려면 (1/8)

${}^{0}_{G}T = \mathrm{Trans}(0.5, 0.2, 0.3)\,\mathrm{Rot}(Z, 90^\circ)$, ${}^{0}_{D}T = \mathrm{Trans}(0.6, -0.1, 0)$

${}^{D}_{W}T = \mathrm{Trans}(0.1, 0.2, 0.15)$ (단위 m). $\{G\}$ 공구 끝, $\{D\}$ 작업대, $\{W\}$ 물체

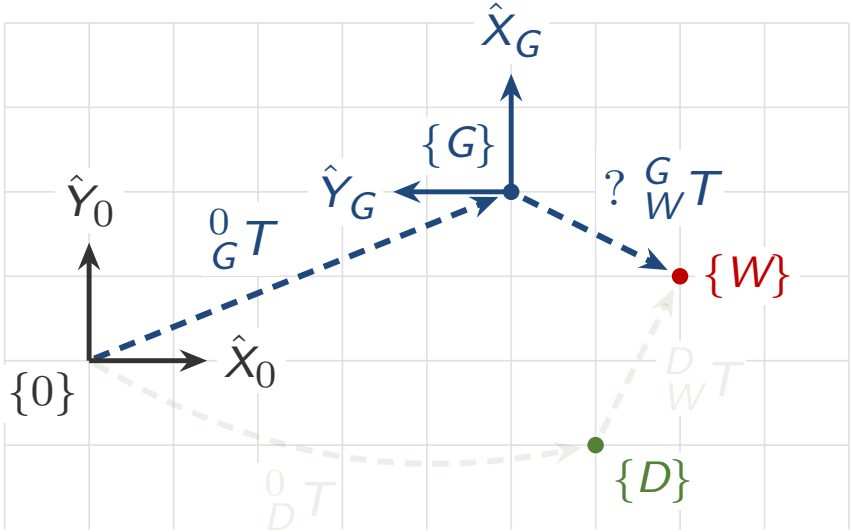
(a) ${}^{G}_{W}T$ 의 식, (b) 물체 원점 ${}^{0}\mathbf{P}_{W\mathrm{org}}$ 와 ${}^{G}_{W}T$ 의 값을 구하시오.



예제 4-3 SCARA 가 작업대 위 물체를 집으려면 (2/8)

SOLUTION 4-3

▶ **(a) $\{W\}$ 로 가는 두 경로 — 미지수는 ${}^{G}_{W}T$ 하나**



경로 1 ${}^{0}_{W}T = {}^{0}_{G}T\,{}^{G}_{W}T$

경로 2 ${}^{0}_{W}T = {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T$

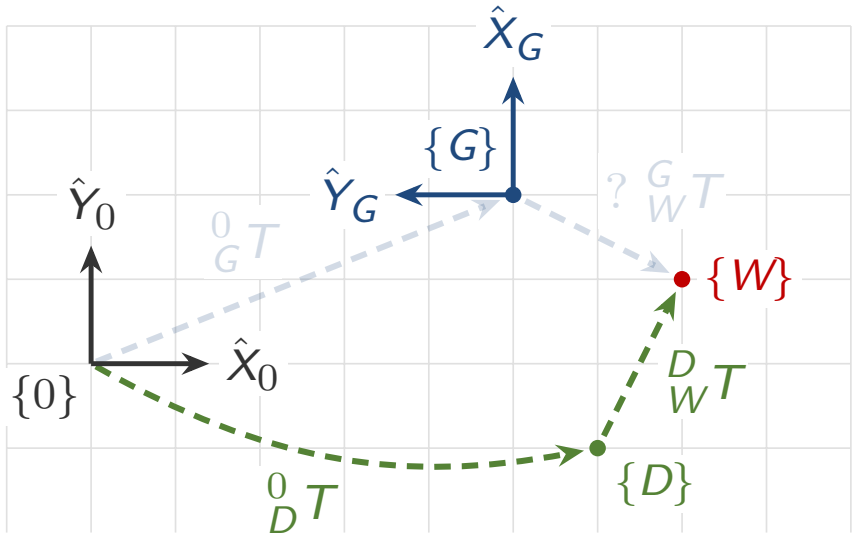
${}^{G}_{W}T = {}^{0}_{G}T^{-1} \cdot {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T$

[읽는 법] 경로 1 은 공구 끝 $\{G\}$ 를 지난다. ${}^{0}_{G}T$ 는 주어져 있다.
물음표가 붙은 ${}^{G}_{W}T$ 가 구할 변환이다.

예제 4-3 SCARA 가 작업대 위 물체를 집으려면 (3/8)

SOLUTION 4-3

▶ **(a) $\{W\}$ 로 가는 두 경로 — 미지수는 ${}^{G}_{W}T$ 하나**



경로 1 ${}^{0}_{W}T = {}^{0}_{G}T\,{}^{G}_{W}T$

경로 2 ${}^{0}_{W}T = {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T$

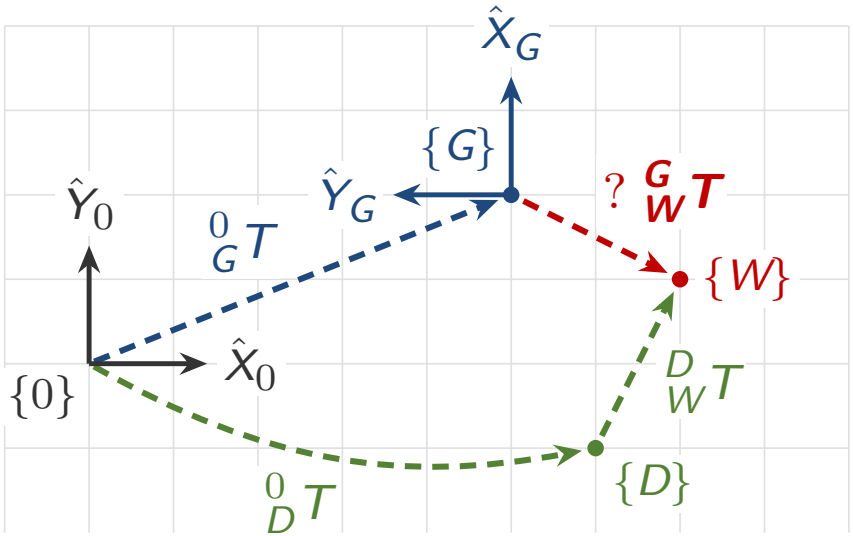
${}^{G}_{W}T = {}^{0}_{G}T^{-1} \cdot {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T$

[읽는 법] 경로 2 는 작업대 $\{D\}$ 를 지난다.
${}^{0}_{D}T$, ${}^{D}_{W}T$ 모두 문제에 주어져 있다.

예제 4-3 SCARA 가 작업대 위 물체를 집으려면 (4/8)

SOLUTION 4-3

▶ **(a) $\{W\}$ 로 가는 두 경로 — 미지수는 ${}^{G}_{W}T$ 하나**



경로 1 ${}^{0}_{W}T = {}^{0}_{G}T\,{}^{G}_{W}T$

경로 2 ${}^{0}_{W}T = {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T$

$$\boxed{{}^{G}_{W}T = {}^{0}_{G}T^{-1} \cdot {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T}$$

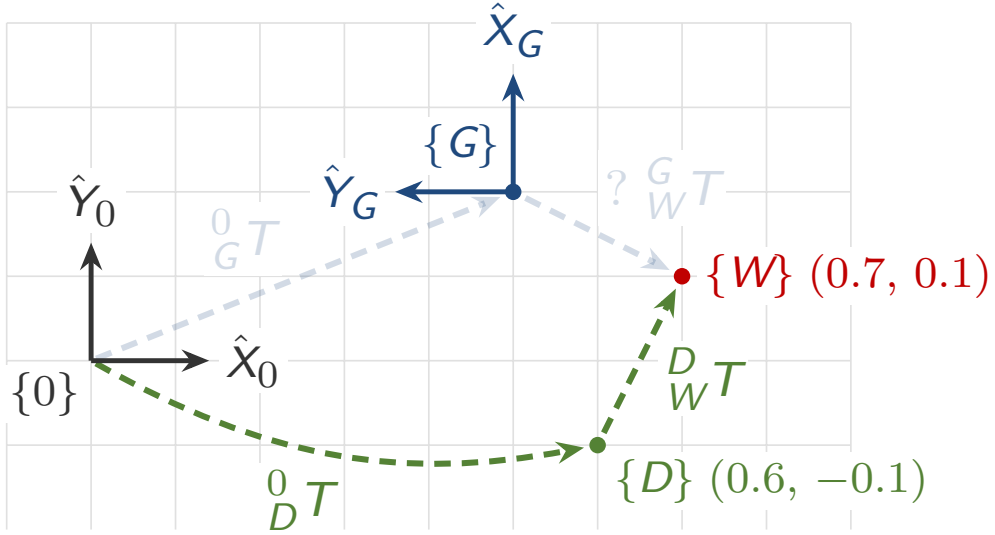
[읽는 법] 두 경로를 같게 놓고 양변 왼쪽에 ${}^{0}_{G}T^{-1}$: ${}^{0}_{G}T^{-1} \cdot {}^{0}_{G}T \cdot {}^{G}_{W}T = {}^{0}_{G}T^{-1} \cdot {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T$

${}^{0}_{G}T^{-1} \cdot {}^{0}_{G}T = \mathbf{I}_4$ 라 좌변에는 ${}^{G}_{W}T$ 만 남는다.

예제 4-3 SCARA 가 작업대 위 물체를 집으려면 (5/8)

SOLUTION 4-3

▶ **(b) 경로 2 로 ${}^{0}_{W}T$ 부터 — $\{D\}\cdot\{W\}$ 의 축은 $\{0\}$ 과 평행**



$$
\begin{aligned}
{}^{0}_{W}T &= {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T \\
&= \mathrm{Trans}(0.7,\ 0.1,\ 0.15)
\end{aligned}
$$

[확인] 두 병진의 곱은 원점 열을 더한 병진이다.

$${}^{0}\mathbf{P}_{W\mathrm{org}} = (0.6,\ -0.1,\ 0) + (0.1,\ 0.2,\ 0.15) = (0.7,\ 0.1,\ 0.15)\ \mathrm{m}.$$

예제 4-3 SCARA 가 작업대 위 물체를 집으려면 (6/8)

SOLUTION 4-3

▶ **(b) (a) 의 식 ${}^{G}_{W}T = {}^{0}_{G}T^{-1} \cdot {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T$ 에 필요한 ${}^{0}_{G}T^{-1}$**

먼저 ${}^{0}_{G}T = \mathrm{Trans}(0.5, 0.2, 0.3)\,\mathrm{Rot}(Z, 90^\circ)$. $c_{90^\circ} = 0$, $s_{90^\circ} = 1$.

(4.3) 의 Z축 경우 $\mathrm{Trans}(\mathbf{t})\,\mathrm{Rot}(Z,\theta) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_Z(\theta) & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right]$

$$ {}^{0}_{G}T = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

[읽는 법] 첫째 열 $(0,\ 1,\ 0)$: $\hat{X}_G$ 는 $\hat{Y}_0$ 방향이다.
원점 열 $(0.5,\ 0.2,\ 0.3)$: $\{0\}$ 원점에서 $\{G\}$ 원점까지의 위치벡터.

예제 4-3 SCARA 가 작업대 위 물체를 집으려면 (7/8)

SOLUTION 4-3

▶ (b) ${}^{0}_{G}T^{-1}$ — 역변환 (4.5)

$$ {}^{0}_{G}T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^{\mathsf{T}} & -\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{R} = {}^{0}_{G}\mathbf{R}, \quad \mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{P}_{G\text{org}} = (0.5,\ 0.2,\ 0.3) $$

$$ \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} \qquad {}^{0}_{G}T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -0.2 \\ -1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

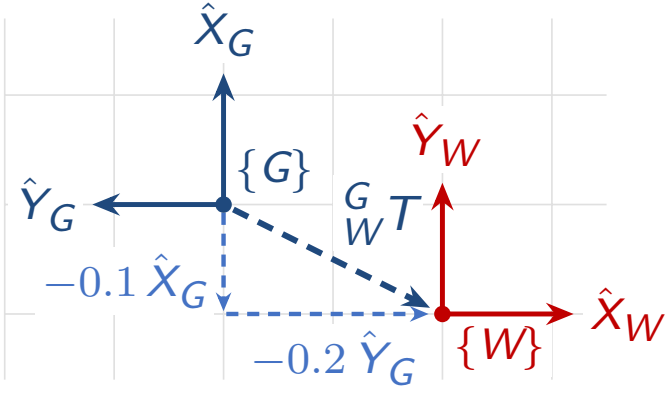
[읽는 법] $\mathbf{R}^{\mathsf{T}} = \mathbf{R}_Z(-90^\circ)$: 회전 블록은 $\hat{Z}_0$ 에 대한 -90° 회전이다.
원점 열 $-\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{p} = {}^{G}\mathbf{P}_{0\text{org}}$: $\{G\}$ 원점에서 $\{0\}$ 원점까지의 위치벡터.

예제 4-3 SCARA 가 작업대 위 물체를 집으려면 (8/8)

SOLUTION 4-3

▶ **(b)** ${}^{G}_{W}T = {}^{0}_{G}T^{-1} \cdot {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T = {}^{0}_{G}T^{-1}\,\mathrm{Trans}(0.7, 0.1, 0.15)$

$$ {}^{G}_{W}T = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & -0.1 \\ -1 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & -0.15 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$



$$ \text{원점 열} = {}^{0}_{G}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\,(0.7,\ 0.1,\ 0.15) + (-0.2,\ 0.5,\ -0.3), \qquad {}^{0}_{G}\mathbf{R}^{\mathsf{T}} = \mathbf{R}_Z(-90^\circ) $$

$$ = (0.1,\ -0.7,\ 0.15) + (-0.2,\ 0.5,\ -0.3) = (-0.1,\ -0.2,\ -0.15) $$

[확인] $\{G\}$ 기준 물체 원점 $(-0.1,\ -0.2,\ -0.15)$ m, 방향은 $\hat{Z}_G$ 에 대해 -90° 회전.
검산: ${}^{0}_{G}T \cdot {}^{G}_{W}T = {}^{0}_{D}T \cdot {}^{D}_{W}T = \mathrm{Trans}(0.7, 0.1, 0.15)$.

Chapter 4. 동차 변환과 기구학

4.1 동차 변환

4.2 연속 변환과 역변환

4.3 변환 방정식

4.4 절대 변환과 상대 변환

4.5 2링크 팔의 순기구학과 역기구학

[왜 필요한가] 같은 명령도 기준 좌표계에 따라 결과가 달라질 수 있다.
새 행렬을 곱하는 위치(왼쪽 · 오른쪽)를 정한다.

절대 변환과 상대 변환 — 정의와 행렬 곱의 규칙 (1/12)

CONCEPT 정의

절대 변환: **고정 좌표계**(변환 중 움직이지 않는 좌표계)의 축 기준

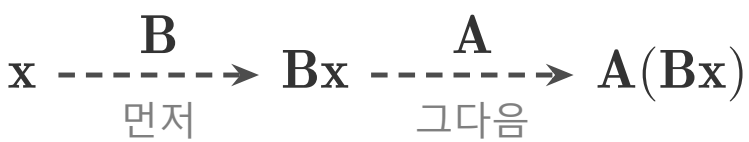
상대 변환: **이동 좌표계**(변환과 함께 움직이는 좌표계)의 축 기준

▶ 행렬 곱의 규칙 — 행렬은 벡터의 왼쪽에 곱한다

RECALL 선형대수 2장

행렬 곱의 결합법칙

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx})$$

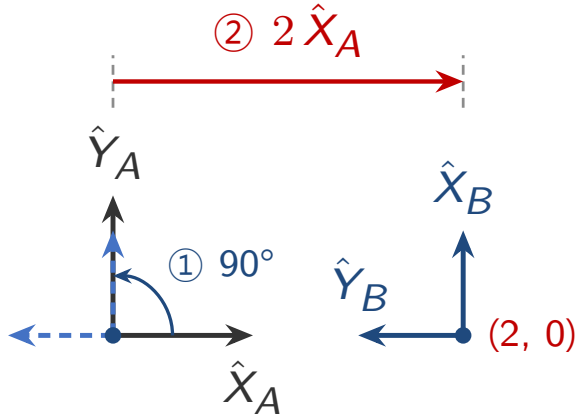


[직관] 곱 $\mathbf{AB}$ 는 그대로 두고, 벡터 $\mathbf{x}$ 에 가까운 $\mathbf{B}$ 가 먼저 작용한다.
절대 변환과 상대 변환의 곱도 이 규칙 하나로 계산한다.

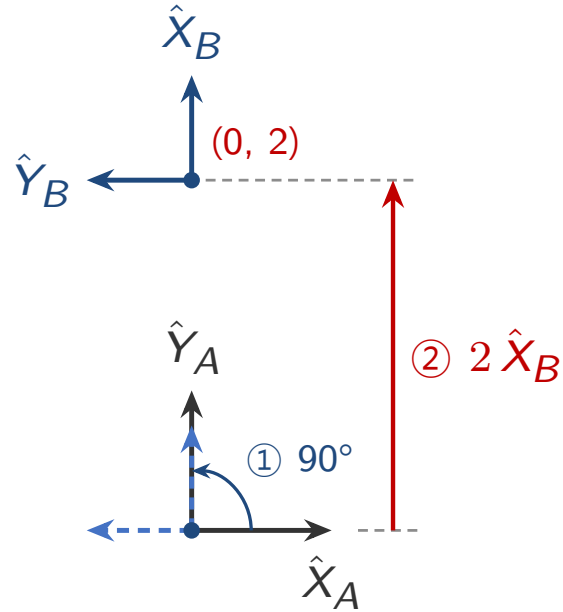
절대 변환과 상대 변환 — 같은 명령, 다른 X (2/12)

명령: ① $\hat{Z}_A$ 에 대해 $90°$ 회전 → ② X 방향으로 2 병진

고정 좌표계 기준 (절대 변환)



이동 좌표계 기준 (상대 변환)

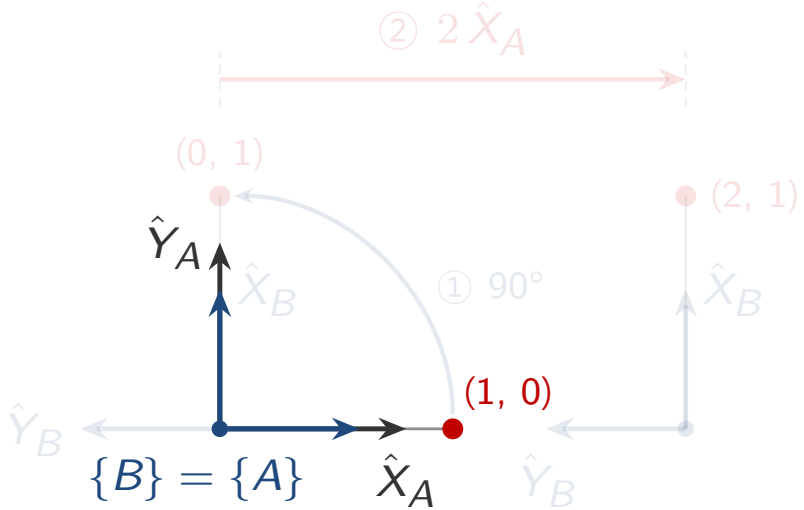


[결론] ② 의 X 가 다르다: 고정된 $\hat{X}_A$ 대 ① 로 회전한 $\hat{X}_B$($\hat{Y}_A$ 방향).
$\{B\}$ 원점 $(2,\ 0)$ 대 $(0,\ 2)$: 다른 운동이므로 행렬도 다르다.

절대 변환과 상대 변환 — 절대 변환을 한 단계씩 (3/12)

▶ **고정 좌표계 기준 — ${}^{B}\mathbf{P}$ 가 일정한 점 P 의 $\{A\}$ 좌표**

$\mathrm{Rot} = \mathrm{Rot}(Z, 90^\circ)$, $\mathrm{Trans} = \mathrm{Trans}(2, 0, 0)$, 빨간 점 P: ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$, 좌표는 x, y 성분만



처음 ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} = \mathbf{(1,\ 0)}$

① ${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = (0,\ 1)$

② ${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Trans} \cdot (\mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P}) = (2,\ 1)$

$= (\mathrm{Trans} \cdot \mathrm{Rot}) \cdot {}^{B}\mathbf{P}$

② ⟵ ①

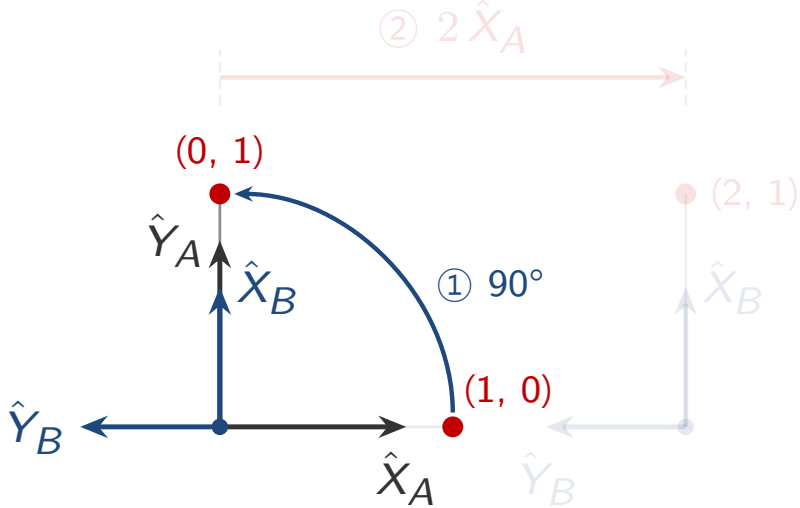
→ ${}^{A}_{B}T = \mathrm{Trans} \cdot \mathrm{Rot}$

[읽는 법] P: $\{B\}$ 원점에서 $\hat{X}_B$ 방향으로 1 인 점 → $\{B\}$ 가 움직여도 ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$.
①② 뒤 ${}^{A}\mathbf{P} = (\text{행렬}) \cdot {}^{B}\mathbf{P}$ 꼴로 쓰면 그 행렬이 (4.1) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}\mathbf{P}$ 의 ${}^{A}_{B}T$.

절대 변환과 상대 변환 — 절대 변환을 한 단계씩 (4/12)

▶ 고정 좌표계 기준 — ${}^{B}\mathbf{P}$ 가 일정한 점 P 의 $\{A\}$ 좌표

$\mathrm{Rot} = \mathrm{Rot}(Z, 90°)$, $\mathrm{Trans} = \mathrm{Trans}(2, 0, 0)$, 빨간 점 P: ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$, 좌표는 x, y 성분만



처음 ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$

① ${}^{A}\mathbf{P} = \mathbf{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = \mathbf{(0,\ 1)}$

② ${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Trans} \cdot (\mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P}) = (2,\ 1)$

$= (\mathrm{Trans} \cdot \mathrm{Rot}) \cdot {}^{B}\mathbf{P}$

② ← ①

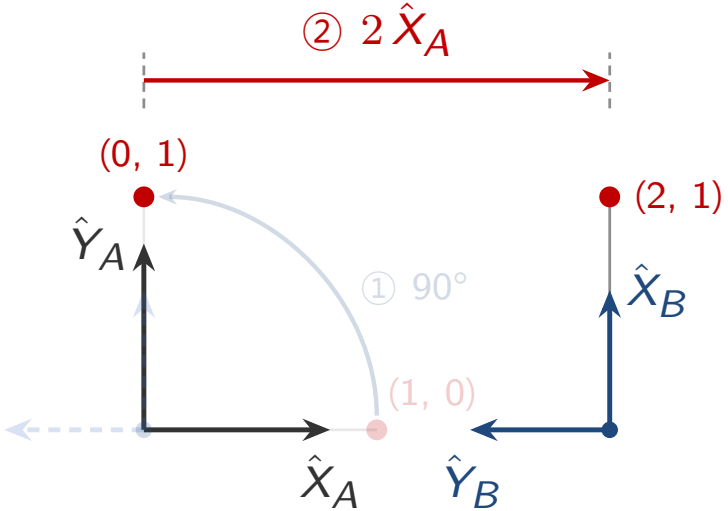
→ ${}^{A}_{B}T = \mathrm{Trans} \cdot \mathrm{Rot}$

[읽는 법] ① $\hat{Z}_A$ 에 대해 $90°$ 회전: $\{A\}$ 좌표 $(1,\ 0)$ 에 Rot 을 곱한다 → $(0,\ 1)$.
$\{B\}$ 도 함께 회전해 $\hat{X}_B$ 는 $\hat{Y}_A$ 방향이 된다.

절대 변환과 상대 변환 — 절대 변환을 한 단계씩 (5/12)

▶ 고정 좌표계 기준 — ${}^{B}\mathbf{P}$ 가 일정한 점 P 의 $\{A\}$ 좌표

$\mathrm{Rot} = \mathrm{Rot}(Z, 90°)$, $\mathrm{Trans} = \mathrm{Trans}(2, 0, 0)$, 빨간 점 P: ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$, 좌표는 x, y 성분만



처음 ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$

① ${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = (0,\ 1)$

② ${}^{A}\mathbf{P} = \mathbf{Trans} \cdot (\mathbf{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P}) = \mathbf{(2,\ 1)}$

$= (\mathrm{Trans} \cdot \mathrm{Rot}) \cdot {}^{B}\mathbf{P}$

② ← ①

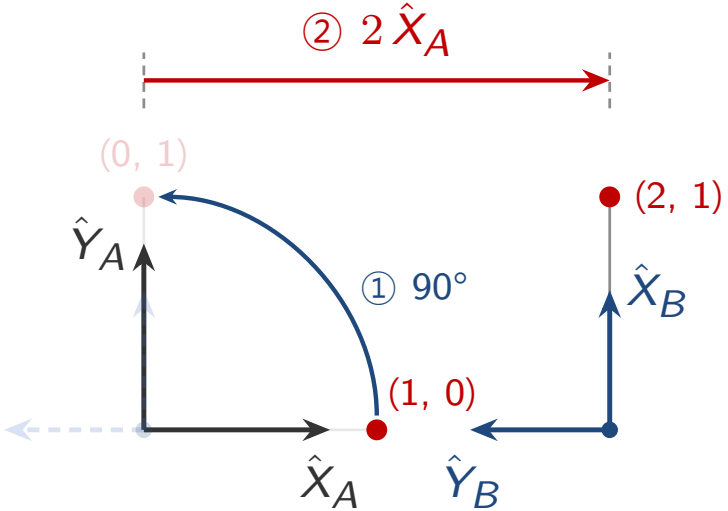
→ ${}^{A}_{B}T = \mathrm{Trans} \cdot \mathrm{Rot}$

[읽는 법] ② $\hat{X}_A$ 방향으로 2 병진: 지금 $\{A\}$ 좌표 $\mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P}$ 에 Trans 를 곱한다.
→ $\mathrm{Trans} \cdot (\mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P}) = (2,\ 1)$: 새 행렬 Trans 는 Rot 의 왼쪽(${}^{B}\mathbf{P}$ 에서 먼 쪽).

절대 변환과 상대 변환 — 절대 변환을 한 단계씩 (6/12)

▶ 고정 좌표계 기준 — ${}^{B}\mathbf{P}$ 가 일정한 점 P 의 $\{A\}$ 좌표

$\mathrm{Rot} = \mathrm{Rot}(Z, 90^\circ)$, $\mathrm{Trans} = \mathrm{Trans}(2, 0, 0)$, 빨간 점 P: ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$, 좌표는 x, y 성분만



처음 ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$

① ${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = (0,\ 1)$

② ${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Trans} \cdot (\mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P}) = (2,\ 1)$

$= (\mathbf{Trans} \cdot \mathbf{Rot}) \cdot {}^{B}\mathbf{P}$

② ← ①

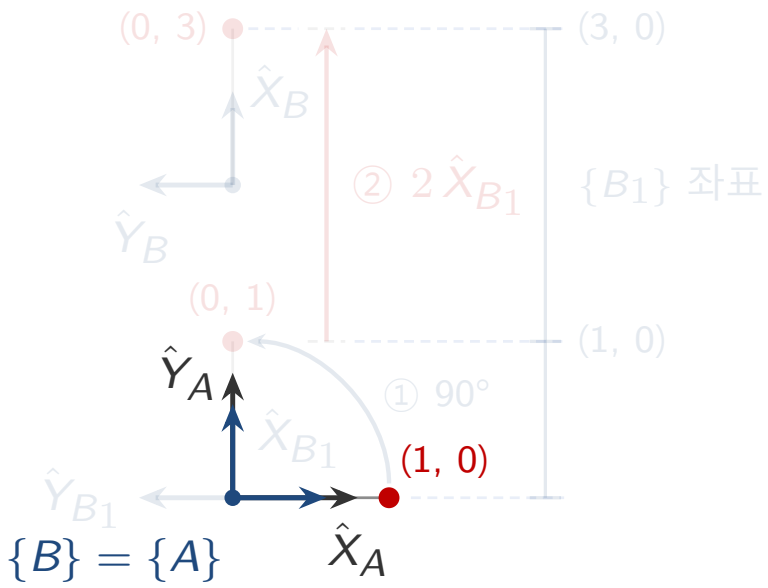
$\rightarrow$ $\boxed{{}^{A}_{B}\boldsymbol{T} = \mathbf{Trans} \cdot \mathbf{Rot}}$

[결론] $(\mathbf{AB})\,\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx})$ 로 묶어 (4.1) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}\mathbf{P}$ 와 비교 $\rightarrow {}^{A}_{B}T = \mathrm{Trans} \cdot \mathrm{Rot}$.
고정 좌표계 기준: 새 변환은 앞 변환의 **왼쪽**에 곱한다(${}^{B}\mathbf{P}$ 가 $(1,\ 0)$ 이 아니어도 같다).

절대 변환과 상대 변환 — 상대 변환을 한 단계씩 (7/12)

▶ 이동 좌표계 기준 — ${}^{B}\mathbf{P}$ 가 일정한 점 P 의 $\{A\}$ 좌표

$\mathrm{Rot} = \mathrm{Rot}(Z, 90^\circ)$, $\mathrm{Trans} = \mathrm{Trans}(2, 0, 0)$, 빨간 점 P: ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$, $\{B_1\}$: ① 뒤의 $\{B\}$



처음 ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} = \mathbf{(1,\ 0)}$

① ${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = (0,\ 1)$

② ${}^{B_1}\mathbf{P} = \mathrm{Trans} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = (3,\ 0)$

$${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Rot} \cdot (\mathrm{Trans} \cdot {}^{B}\mathbf{P}) = (0,\ 3)$$

$$= (\mathrm{Rot} \cdot \mathrm{Trans}) \cdot {}^{B}\mathbf{P}$$

① ⟶ ②

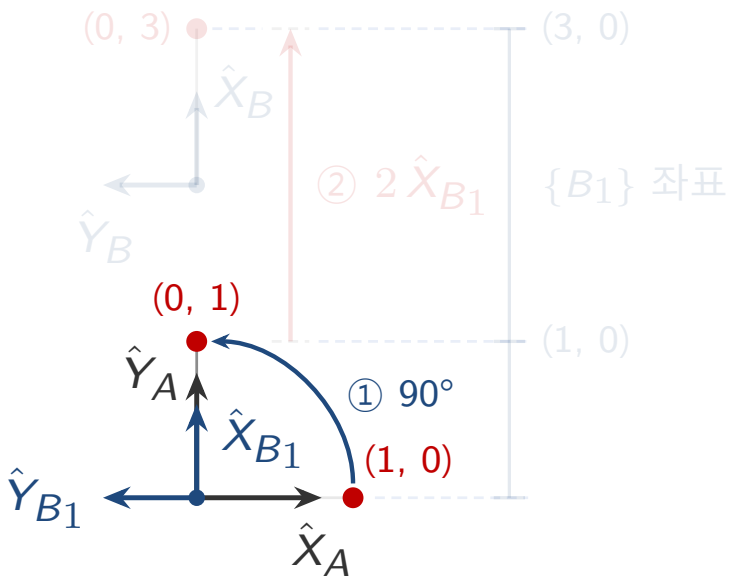
$$\rightarrow \quad {}^{A}_{B}T = \mathrm{Rot} \cdot \mathrm{Trans}$$

[읽는 법] P: $\{B\}$ 원점에서 $\hat{X}_B$ 방향으로 1 인 점 → $\{B\}$ 가 움직여도 ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$.
① 은 처음 $\{B\} = \{A\}$ 라 고정 기준과 같고, ② 의 X 는 ① 로 회전한 $\hat{X}_{B_1}$ ($\hat{Y}_A$ 방향).

절대 변환과 상대 변환 — 상대 변환을 한 단계씩 (8/12)

▶ 이동 좌표계 기준 — ${}^{B}\mathbf{P}$ 가 일정한 점 P 의 $\{A\}$ 좌표

$\mathrm{Rot} = \mathrm{Rot}(Z, 90^\circ)$, $\mathrm{Trans} = \mathrm{Trans}(2, 0, 0)$, 빨간 점 P: ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$, $\{B_1\}$: ① 뒤의 $\{B\}$



처음 ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$

① ${}^{A}\mathbf{P} = \mathbf{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = \mathbf{(0,\ 1)}$

② ${}^{B_1}\mathbf{P} = \mathrm{Trans} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = (3,\ 0)$

${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Rot} \cdot (\mathrm{Trans} \cdot {}^{B}\mathbf{P}) = (0,\ 3)$

$= (\mathrm{Rot} \cdot \mathrm{Trans}) \cdot {}^{B}\mathbf{P}$

① ⟶ ②

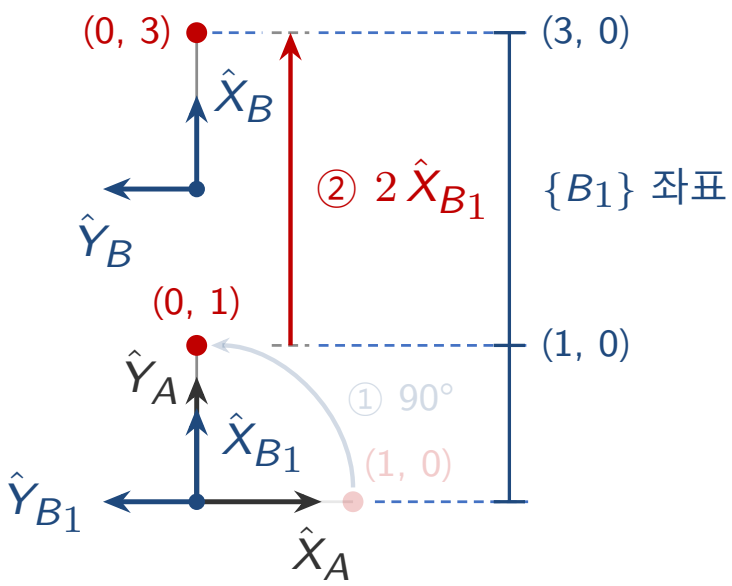
→ ${}^{A}_{B}T = \mathrm{Rot} \cdot \mathrm{Trans}$

[읽는 법] ① $\hat{Z}_A$ 에 대해 90° 회전: $\{A\}$ 좌표 $(1,\ 0)$ 에 Rot 을 곱한다 → $(0,\ 1)$.
① 뒤의 $\{B\}$ 를 $\{B_1\}$ 이라 하면 ${}^{A}_{B_1}T = \mathrm{Rot}$, P 의 $\{B_1\}$ 좌표는 ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$.

절대 변환과 상대 변환 — 상대 변환을 한 단계씩 (9/12)

▶ 이동 좌표계 기준 — ${}^{B}\mathbf{P}$ 가 일정한 점 P 의 $\{A\}$ 좌표

$\mathrm{Rot} = \mathrm{Rot}(Z, 90^\circ)$, $\mathrm{Trans} = \mathrm{Trans}(2, 0, 0)$, 빨간 점 P: ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$, $\{B_1\}$: ① 뒤의 $\{B\}$



처음 ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$

① ${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = (0,\ 1)$

② ${}^{B_1}\mathbf{P} = \mathbf{Trans} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = \mathbf{(3,\ 0)}$

${}^{A}\mathbf{P} = \mathbf{Rot} \cdot (\mathbf{Trans} \cdot {}^{B}\mathbf{P}) = \mathbf{(0,\ 3)}$

$= (\mathrm{Rot} \cdot \mathrm{Trans}) \cdot {}^{B}\mathbf{P}$

① ⟶ ②

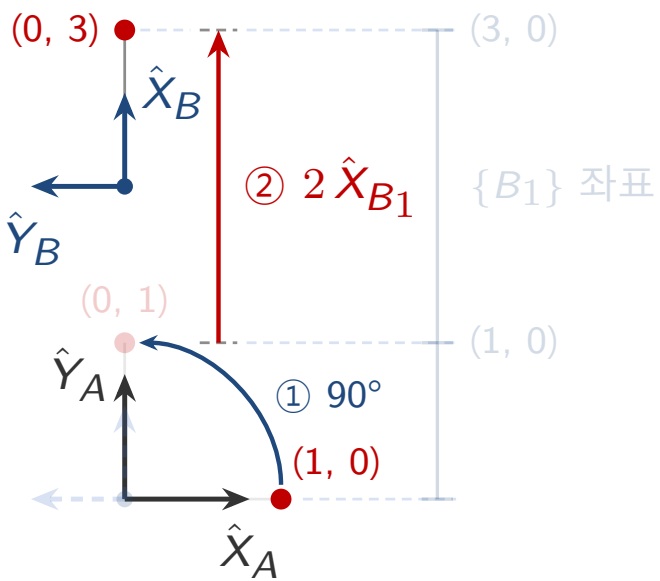
→ ${}^{A}_{B}T = \mathrm{Rot} \cdot \mathrm{Trans}$

[읽는 법] ② $\hat{X}_{B_1}$ 방향으로 2 병진: 지금 $\{B_1\}$ 좌표 ${}^{B}\mathbf{P}$ 에 Trans 를 곱한다 → $(3,\ 0)$.
→ 바깥 $\mathrm{Rot} = {}^{A}_{B_1}T$ 로 $\{A\}$ 좌표: 새 행렬 Trans 는 Rot 의 오른쪽(${}^{B}\mathbf{P}$ 에 가까운 쪽).

절대 변환과 상대 변환 — 상대 변환을 한 단계씩 (10/12)

▶ 이동 좌표계 기준 — ${}^{B}\mathbf{P}$ 가 일정한 점 P 의 $\{A\}$ 좌표

$\mathrm{Rot} = \mathrm{Rot}(Z, 90^\circ)$, $\mathrm{Trans} = \mathrm{Trans}(2, 0, 0)$, 빨간 점 P: ${}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$, $\{B_1\}$: ① 뒤의 $\{B\}$



처음 ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{B}\mathbf{P} = (1,\ 0)$

① ${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = (0,\ 1)$

② ${}^{B_1}\mathbf{P} = \mathrm{Trans} \cdot {}^{B}\mathbf{P} = (3,\ 0)$

$${}^{A}\mathbf{P} = \mathrm{Rot} \cdot (\mathrm{Trans} \cdot {}^{B}\mathbf{P}) = (0,\ 3)$$

$$= (\mathbf{Rot} \cdot \mathbf{Trans}) \cdot {}^{B}\mathbf{P}$$

① ⟶ ②

$$\rightarrow \boxed{{}^{A}_{B}\boldsymbol{T} = \mathbf{Rot} \cdot \mathbf{Trans}}$$

[결론] $(\mathbf{AB})\,\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx})$ 로 묶어 (4.1) ${}^{A}\mathbf{P} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}\mathbf{P}$ 와 비교 → ${}^{A}_{B}T = \mathrm{Rot} \cdot \mathrm{Trans}$.
이동 좌표계 기준: 새 변환은 앞 변환의 **오른쪽**에 곱한다(어떤 ${}^{B}\mathbf{P}$ 에도 같다).

절대 변환과 상대 변환 — 곱하는 위치 (11/12)

T_{cum}: 지금까지 적용한 변환의 곱(cumulative), T_{new}: 새로 적용할 변환(new)

절대 변환: $T_{\text{cum}} \leftarrow \boldsymbol{T_{\text{new}}} \cdot T_{\text{cum}}$ (왼쪽 곱)
② ← ①

상대 변환: $T_{\text{cum}} \leftarrow T_{\text{cum}} \cdot \boldsymbol{T_{\text{new}}}$ (오른쪽 곱)
① → ②

(4.8)

예: ① 90° 회전 → ② X 방향으로 2 병진. 두 기준 모두 $T_{\text{cum}} = \text{Rot}$, $T_{\text{new}} = \text{Trans}$

고정 좌표계 기준 ${}^{A}\mathbf{P} = \textbf{Trans} \cdot (\text{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P})$ ① 뒤 P 의 $\{A\}$ 좌표 $\text{Rot} \cdot {}^{B}\mathbf{P}$ 에 Trans

이동 좌표계 기준 ${}^{A}\mathbf{P} = \text{Rot} \cdot (\textbf{Trans} \cdot {}^{B}\mathbf{P})$ ① 뒤 P 의 $\{B_1\}$ 좌표 ${}^{B}\mathbf{P}$ 에 Trans

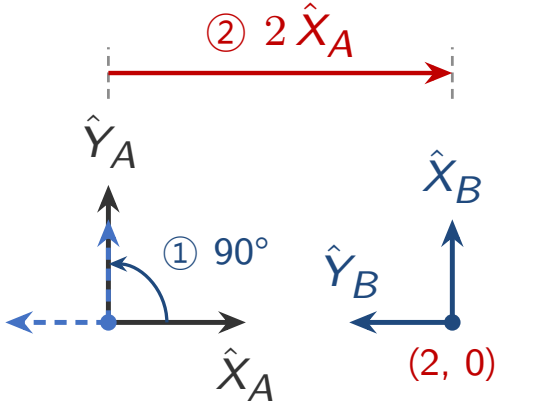
[결론] 새 변환 T_{new} 는 그 기준 좌표계에서 표현한 지금 P 의 좌표에 곱한다.
고정: $\{A\}$ 좌표 $T_{\text{cum}} \cdot {}^{B}\mathbf{P}$ 에 → $T_{\text{new}} \cdot T_{\text{cum}}$
이동: 직전 $\{B\}$ 좌표 ${}^{B}\mathbf{P}$ 에 → $T_{\text{cum}} \cdot T_{\text{new}}$

절대 변환과 상대 변환 — 같은 곱을 만드는 두 절차 (12/12)

한 행렬 $\mathrm{Trans}(2,0,0)\cdot\mathrm{Rot}(Z,90^\circ)$ 를 고정 기준으로도, 이동 기준으로도 만든다.

고정 좌표계 기준

① 회전 ② **병진**



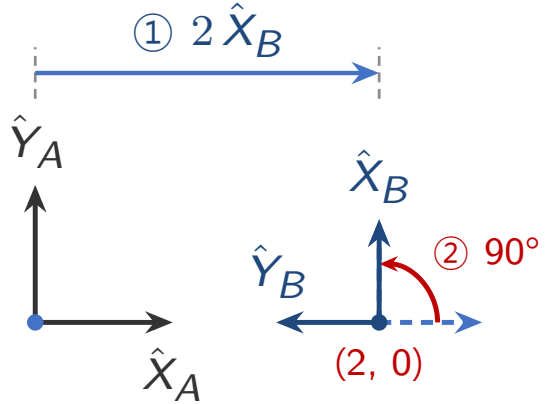
$\mathrm{Trans}(2,0,0)\cdot\mathrm{Rot}(Z,90^\circ)$

② ← ①

=

이동 좌표계 기준

① 병진 ② **회전**



$\mathrm{Trans}(2,0,0)\cdot\mathrm{Rot}(Z,90^\circ)$

① → ②

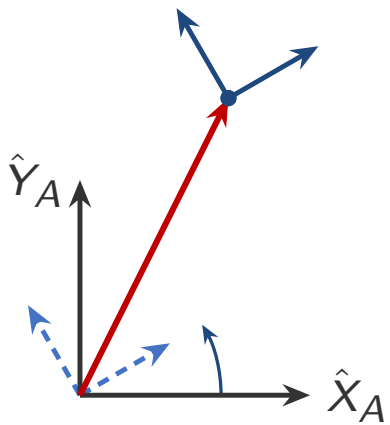
[결론] 두 절차 모두 같은 곱, 같은 결과: 원점 $(2,\ 0)$, $\hat{X}_B$ 는 $\hat{Y}_A$ 방향.
다른 것은 곱 아래 ①② 의 자리: 고정 기준은 ② ← ①, 이동 기준은 ① → ②.

기준과 순서 — 절차 4가지, 결과 2가지 (1/2)

$\mathrm{Rot}(Z, 30°)$ 와 $\mathrm{Trans}(1, 2, 0)$: 기준 2가지 × 순서 2가지. 빨강: ② $= T_{\mathrm{new}}$

(1) 고정 좌표계 기준

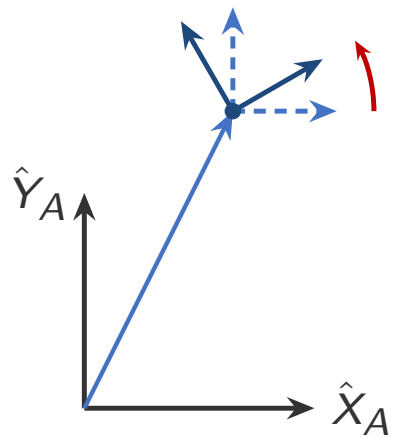
① 회전 **② 병진**



$=$

(2) 이동 좌표계 기준

① 병진 **② 회전**



Trans $\cdot$ Rot $= \boldsymbol{T}_{\mathbf{new}}\, T_{\mathrm{cum}}$ Trans $\cdot$ **Rot** $= T_{\mathrm{cum}}\, \boldsymbol{T}_{\mathbf{new}}$

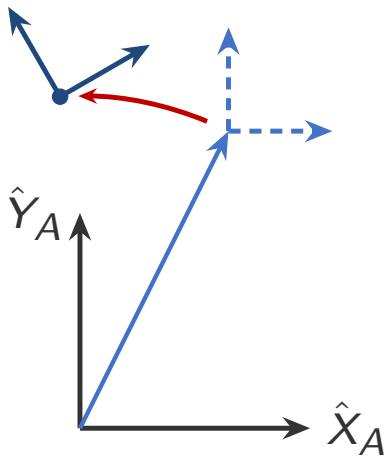
[결론] (1) · (2) 둘 다 Trans · Rot: 같은 곱을 만드는 두 절차.
원점 $(1,\ 2,\ 0)$, 회전 $30°$.

기준과 순서 — 절차 4가지, 결과 2가지 (2/2)

$\mathrm{Rot}(Z, 30°)$ 와 $\mathrm{Trans}(1, 2, 0)$: 기준 2가지 × 순서 2가지. 빨강: ② $= T_{\mathrm{new}}$

(3) 고정 좌표계 기준

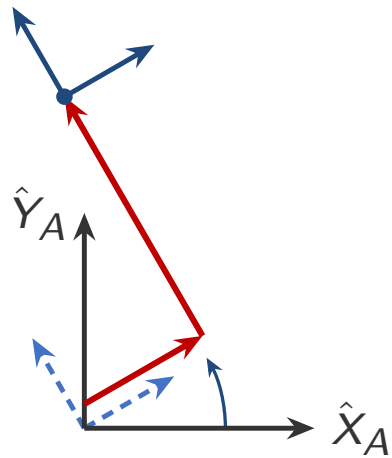
① 병진 **② 회전**



$=$

(4) 이동 좌표계 기준

① 회전 **② 병진**

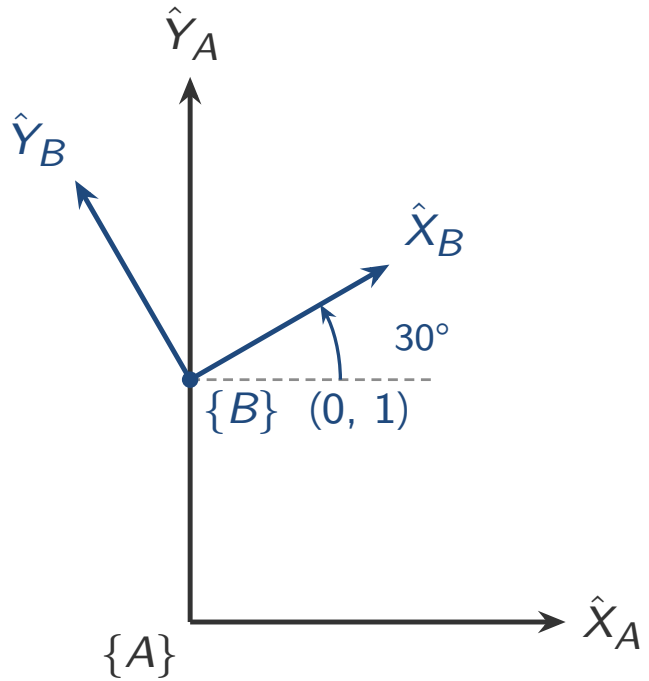


$\mathbf{Rot} \cdot \mathrm{Trans} = \boldsymbol{T}_{\mathbf{new}}\, T_{\mathrm{cum}}$ $\quad$ $\mathrm{Rot} \cdot \mathbf{Trans} = T_{\mathrm{cum}}\, \boldsymbol{T}_{\mathbf{new}}$

[결론] (3) · (4) 둘 다 $\mathrm{Rot} \cdot \mathrm{Trans}$: 같은 곱을 만드는 두 절차.
원점 $\mathbf{R}_Z(30°)\,(1,\ 2,\ 0) \approx (-0.13,\ 2.23,\ 0)$: $(1, 2, 0)$ 을 30° 회전한 위치.

예제 4-4 상대 변환 두 번 (1/4)

$\{B\}$: $\{A\}$ 를 $\hat{Y}_A$ 방향으로 1 병진한 뒤 자신의 Z축에 대해 30° 회전한 좌표계
$\{C\}$: $\{B\}$ 를 $\{B\}$ 기준 $(1,\ 1)$ 병진한 뒤 자신의 Z축에 대해 -30° 회전한 좌표계
${}^{A}_{C}T$ 를 구하시오.



예제 4-4 상대 변환 두 번 (2/4)

SOLUTION 4-4

▶ **(4.3) $\mathrm{Trans}(\mathbf{t})\,\mathrm{Rot}(Z,\theta)$: 회전 블록 $\mathbf{R}_Z(\theta)$, 원점 열 $\mathbf{t}$**

$$ {}^{A}_{B}T = \mathrm{Trans}(0,1,0)\,\mathrm{Rot}(Z,30^\circ) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_{30^\circ} & -s_{30^\circ} & 0 & 0 \\ s_{30^\circ} & c_{30^\circ} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^{B}_{C}T = \mathrm{Trans}(1,1,0)\,\mathrm{Rot}(Z,-30^\circ) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_{30^\circ} & s_{30^\circ} & 0 & 1 \\ -s_{30^\circ} & c_{30^\circ} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ c_{30^\circ} = c_{-30^\circ} = \sqrt{3}/2, \quad s_{30^\circ} = 1/2, \quad s_{-30^\circ} = -1/2 $$

[읽는 법] 둘 다 이동 좌표계 기준: 상대 변환 (4.8) $T_{\mathrm{cum}} \leftarrow T_{\mathrm{cum}}\,T_{\mathrm{new}}$, 즉 ${}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T$.

예제 4-4 상대 변환 두 번 (3/4)

SOLUTION 4-4

${}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T, \quad {}^{A}_{B}T = \mathrm{Trans}(0,1,0)\,\mathrm{Rot}(Z,30^\circ), \quad {}^{B}_{C}T = \mathrm{Trans}(1,1,0)\,\mathrm{Rot}(Z,-30^\circ).$

▶ **(1) 회전 블록 ${}^{A}_{B}\mathbf{R} \cdot {}^{B}_{C}\mathbf{R}$ 의 $(X,\ Y)$ 원소 4개 — Z 행 · 열은 그대로**

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2+s^2 & cs-sc \\ sc-cs & s^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (c=\cos 30^\circ,\ s=\sin 30^\circ)$$

▶ **(2) 원점 열 ${}^{A}\mathbf{P}_{B\mathrm{org}} + {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}\mathbf{P}_{C\mathrm{org}}$ 의 $x,\ y$ 성분**

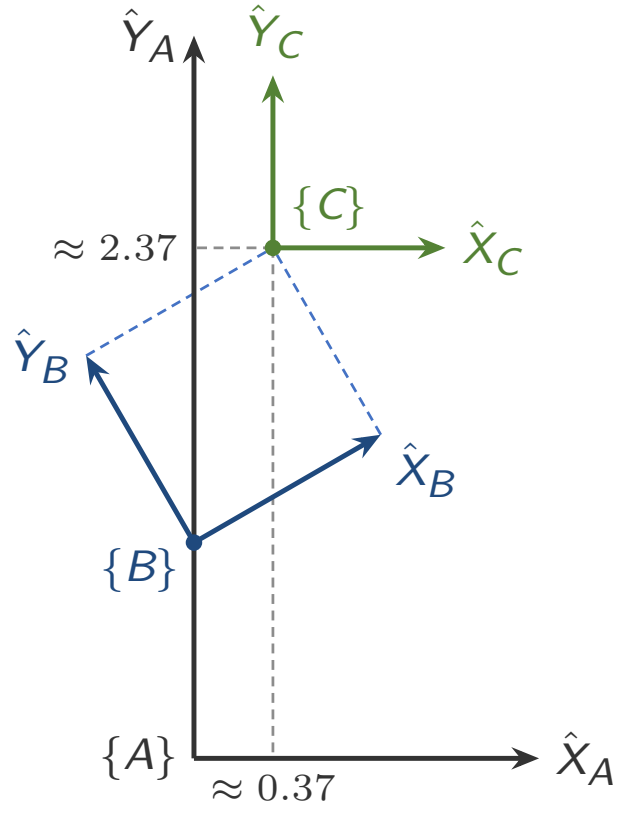
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-s \\ 1+s+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}-1)/2 \\ (3+\sqrt{3})/2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.37 \\ 2.37 \end{bmatrix}$$

[읽는 법] 회전 블록이 단위행렬: $\{C\}$ 의 축은 $\{A\}$ 의 축과 평행하다 $(30^\circ - 30^\circ = 0)$.

예제 4-4 상대 변환 두 번 (4/4)

SOLUTION 4-4

$$
{}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & (\sqrt{3}-1)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (3+\sqrt{3})/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$



[확인] $\{C\}$ 원점은 $\{B\}$ 원점에서 $\hat{X}_B$, $\hat{Y}_B$ 방향으로 각각 1 이동한 위치다.

Chapter 4. 동차 변환과 기구학

4.1 동차 변환

4.2 연속 변환과 역변환

4.3 변환 방정식

4.4 절대 변환과 상대 변환

4.5 2링크 팔의 순기구학과 역기구학

[왜 필요한가] 관절은 각으로 움직이고, 작업은 팔 끝의 위치로 주어진다.
각 $\rightarrow$ 위치(순기구학)와 위치 $\rightarrow$ 각을 모두 계산할 수 있어야 한다.

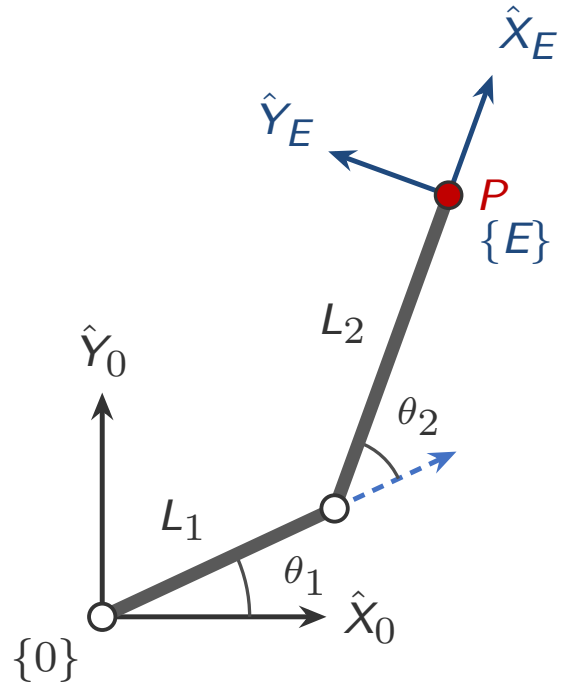
순기구학 — 변환의 곱으로 (1/2)

순기구학(forward kinematics): 관절 각 (θ_1, θ_2) 로 위치 $P = (x, y)$ 를 구한다.

▶ $\{0\}$ **에서** $\{E\}$ **까지 기본 변환 네 번**

(1) 관절 1 에서 θ_1 회전
(2) 링크 1 방향으로 L_1 병진
(3) 관절 2 에서 θ_2 회전
(4) 링크 2 방향으로 L_2 병진

$\{E\}$: 팔 끝의 말단장치 좌표계



$$ {}^{0}_{E}T = \mathrm{Rot}(Z, \theta_1)\,\mathrm{Trans}(L_1, 0, 0)\,\mathrm{Rot}(Z, \theta_2)\,\mathrm{Trans}(L_2, 0, 0) $$

[직관] (2)∼(4) 는 이동 좌표계 기준: 상대 변환 (4.8) $T_{\mathrm{cum}} \leftarrow T_{\mathrm{cum}}\, T_{\mathrm{new}}$ (오른쪽 곱).

순기구학 — 변환의 곱으로 (2/2)

$c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$, $c_{12} = \cos(\theta_1+\theta_2)$, $s_{12} = \sin(\theta_1+\theta_2)$ 로 줄여 쓴다.

▶ **(1) 링크마다 Rot 뒤 Trans — 원점 열 $\mathbf{R}_Z(\theta_i)\,(L_i,\,0,\,0) = (L_i c_i,\,L_i s_i,\,0)$**

$$
{}^{0}_{E}T = \left[\begin{array}{ccc:c} c_1 & -s_1 & 0 & L_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & L_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c} c_2 & -s_2 & 0 & L_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & L_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1c_1+L_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_1s_1+L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

▶ **(2) 원소마다 — 삼각함수의 덧셈정리**

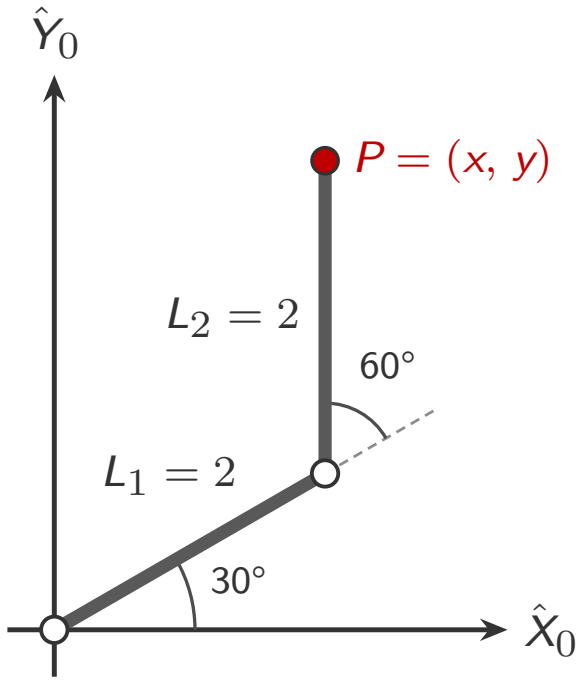
$$c_1c_2 - s_1s_2 = c_{12}, \qquad s_1c_2 + c_1s_2 = s_{12}$$

$$(1,4)\text{ 원소}: \quad c_1(L_2c_2) - s_1(L_2s_2) + L_1c_1 = L_1c_1 + L_2(c_1c_2 - s_1s_2) = L_1c_1 + L_2c_{12}$$

$$(2,4)\text{ 원소}: \quad s_1(L_2c_2) + c_1(L_2s_2) + L_1s_1 = L_1s_1 + L_2(s_1c_2 + c_1s_2) = L_1s_1 + L_2s_{12}$$

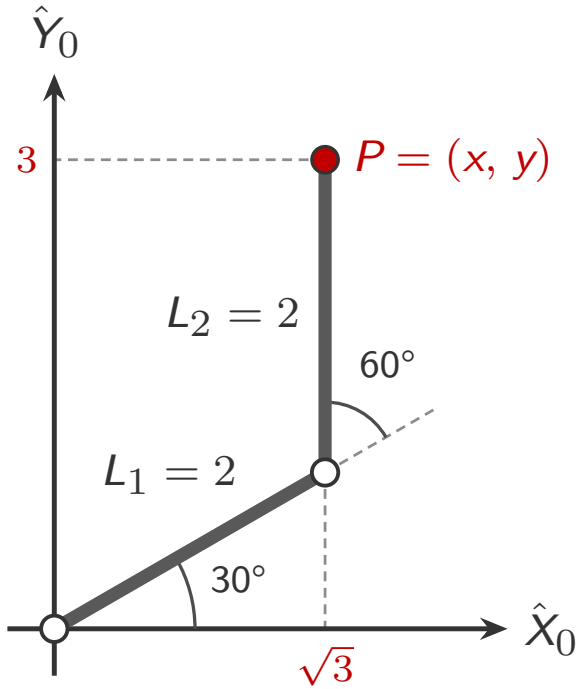
[결론] 원점 열이 팔 끝 $P=(x,\,y)$: $x = L_1c_1 + L_2c_{12}$, $y = L_1s_1 + L_2s_{12}$.
3.1절에서 삼각형으로 구한 식과 같다.

예제 4-5 2링크 팔의 순기구학 (1/2)



링크 길이가 $L_1 = L_2 = 2$ 인 2링크 팔의 관절 각이 $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 60°$ 이다.
팔 끝의 위치 $P = (x, y)$ 를 구하시오.

예제 4-5 2링크 팔의 순기구학 (2/2)



SOLUTION 4-5

▶ **(1) 일반식 — ${}^0_E T$ 의 원점 열**

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12}$$

$$y = L_1 s_1 + L_2 s_{12}$$

▶ **(2) 각 대입 — $\theta_1 = 30°$, $\theta_1 + \theta_2 = 90°$**

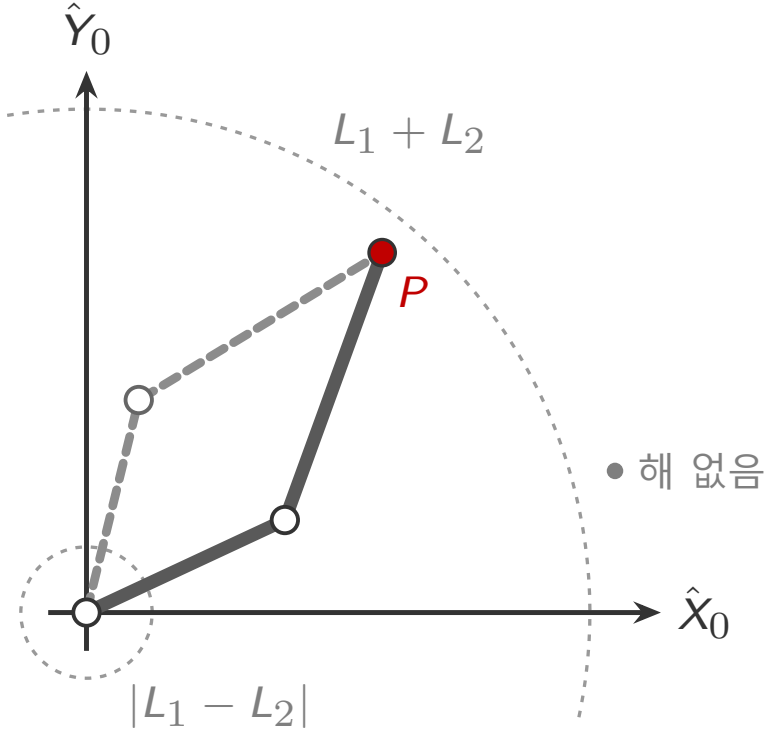
$$x = 2\cos 30° + 2\cos 90° = \sqrt{3}$$

$$y = 2\sin 30° + 2\sin 90° = 3$$

[확인] 그림의 $P \approx (1.73,\ 3)$. $\theta_1 + \theta_2 = 90°$ 라 링크 2 가 $\hat{Y}_0$ 방향이다.

역기구학 — 위치에서 각으로

역기구학(inverse kinematics): 위치 $P = (x, y)$ 로 관절 각 (θ_1, θ_2) 를 구한다.



▶ **해가 둘 — 같은 P**

팔꿈치 아래(실선) · 팔꿈치 위(점선)

▶ **해가 없다 — 작업공간 밖**

작업공간(도달 범위): 점선 원 사이

$$|L_1 - L_2| \le \sqrt{x^2 + y^2} \le L_1 + L_2$$

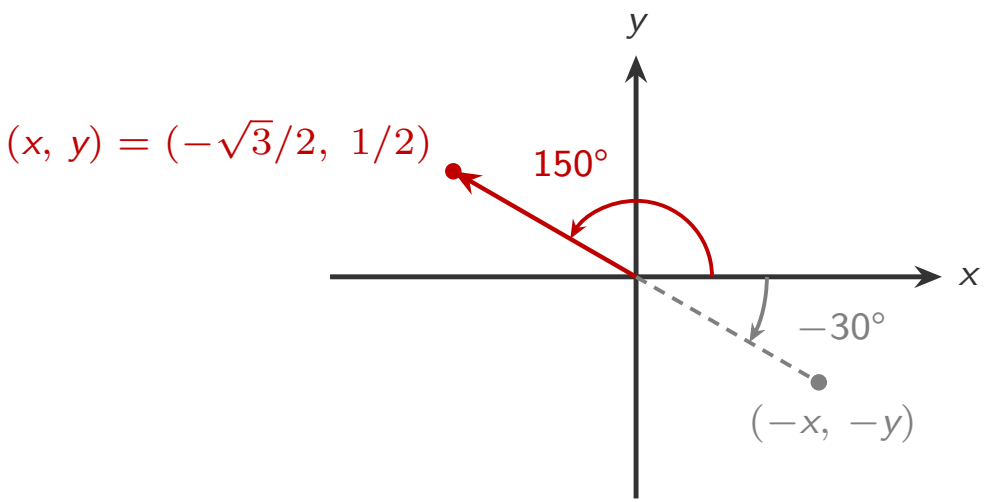
[주의] 범위 안이면 일반적으로 해가 둘이다.
바깥 경계 $\sqrt{x^2 + y^2} = L_1 + L_2$ 에서는 팔이 펴져 하나다.

atan2 — 두 인수의 부호로 사분면 판별

CONCEPT 정의

$\mathrm{atan2}(y,\, x)$: 점 $(x,\, y)$ 의 **편각**(+x축에서 반시계로 잰 각) $\theta \in (-180°,\, 180°]$

$y = r\sin\theta,\ x = r\cos\theta$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$. $(0,\, 0)$ 에서는 정의하지 않는다.



$y/x = -\sqrt{3}/3$ (두 점 모두)

$\arctan(y/x) = -30°$

$\mathrm{atan2}(1/2,\, -\sqrt{3}/2) = 150°$

[주의] y/x 는 $(x,\, y)$ 와 $(-x,\, -y)$ 에서 같다. atan2 는 두 인수의 부호를 모두 사용한다.

역기구학 — θ_2 와 θ_1 구하기 (1/4)

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12}, \quad y = L_1 s_1 + L_2 s_{12}$$

(1) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos\theta_2}$

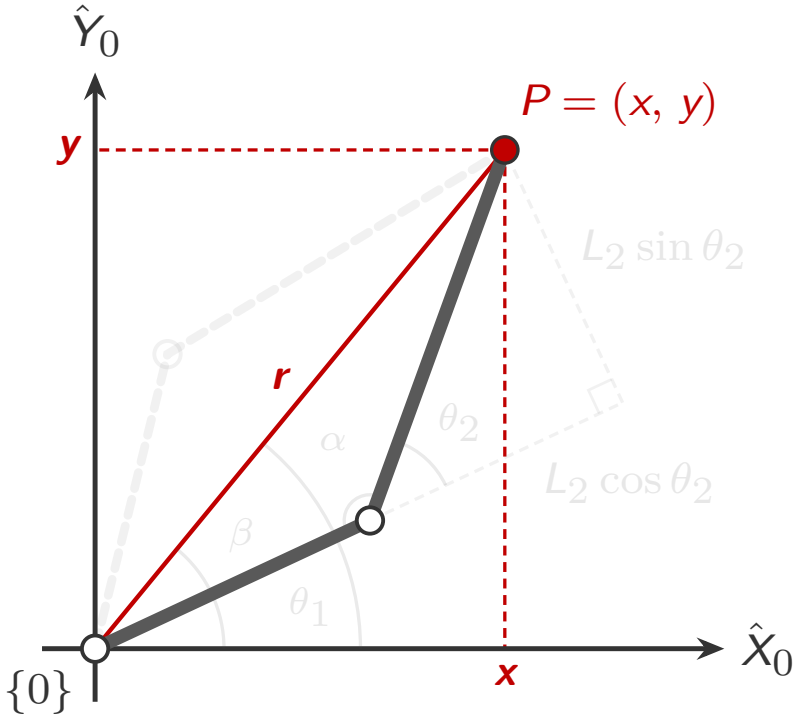
(2) $\cos\theta_2 = \dfrac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2}$

(3) $\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_2}$

$\theta_2 = \text{atan2}(\sin\theta_2,\ \cos\theta_2)$

(4) $\theta_1 = \alpha - \beta, \quad \alpha = \text{atan2}(y,\ x)$

$\beta = \text{atan2}(L_2 \sin\theta_2,\ L_1 + L_2 \cos\theta_2)$



[읽는 법] 두 식을 제곱해 더한다. 제곱항은 $c_1^2 + s_1^2 = c_{12}^2 + s_{12}^2 = 1$ 이 된다.
교차항: $2L_1 L_2(c_1 c_{12} + s_1 s_{12})$, $c_1 c_{12} + s_1 s_{12} = \cos\big((\theta_1 + \theta_2) - \theta_1\big) = \cos\theta_2$.

역기구학 — θ_2 와 θ_1 구하기 (2/4)

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12}, \quad y = L_1 s_1 + L_2 s_{12}$$

(1) $x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos\theta_2$

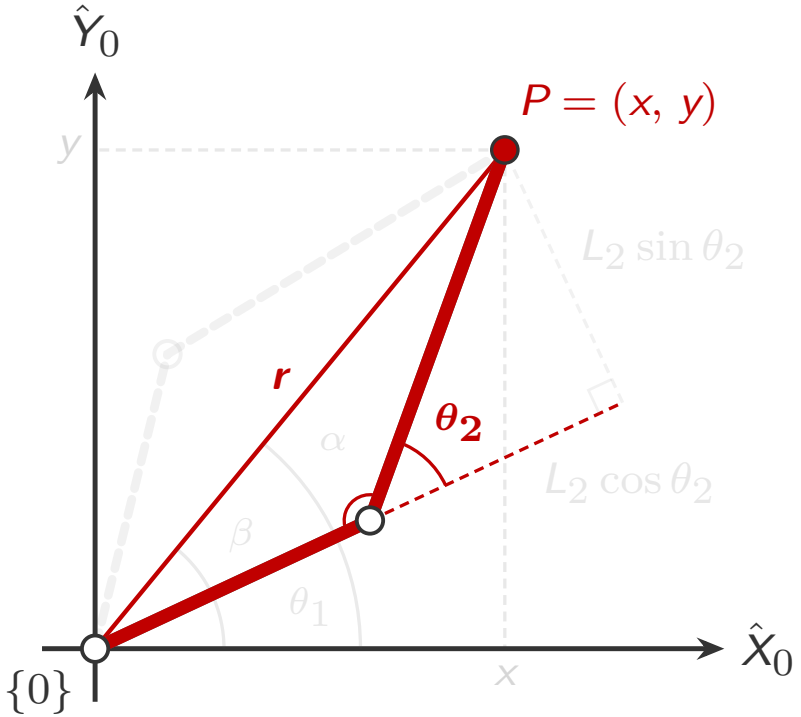
(2) $\cos\theta_2 = \dfrac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2}$

(3) $\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_2}$

$\theta_2 = \text{atan2}(\sin\theta_2,\ \cos\theta_2)$

(4) $\theta_1 = \alpha - \beta, \quad \alpha = \text{atan2}(y,\ x)$

$\beta = \text{atan2}(L_2 \sin\theta_2,\ L_1 + L_2 \cos\theta_2)$



[직관] 그림의 삼각형에서 코사인법칙 $r^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1 L_2 \cos(180^\circ - \theta_2)$ 와 같다.
$|\cos\theta_2| > 1$ 이면 해가 없다(도달 범위 밖).

역기구학 — θ_2 와 θ_1 구하기 (3/4)

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12}, \quad y = L_1 s_1 + L_2 s_{12}$$

(1) $x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos\theta_2$

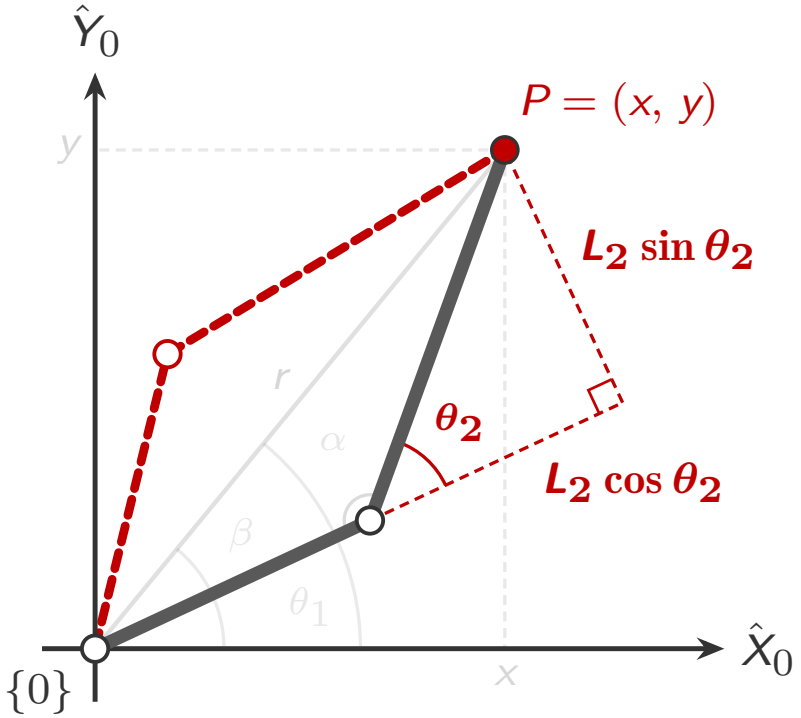
(2) $\cos\theta_2 = \dfrac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2}$

(3) $\boldsymbol{\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_2}}$

$\boldsymbol{\theta_2 = \mathrm{atan2}(\sin\theta_2,\ \cos\theta_2)}$

(4) $\theta_1 = \alpha - \beta, \quad \alpha = \mathrm{atan2}(y,\ x)$

$\beta = \mathrm{atan2}(L_2 \sin\theta_2,\ L_1 + L_2 \cos\theta_2)$



[주의] arccos 는 $0^\circ \sim 180^\circ$ 만 준다. atan2 는 $\sin\theta_2$ 의 부호까지 반영한다.
$\theta_2 > 0$: 팔꿈치 아래(실선), $\theta_2 < 0$: 팔꿈치 위(점선). $x < 0$ 이면 위 · 아래가 바뀐다.

역기구학 — θ_2 와 θ_1 구하기 (4/4)

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12}, \quad y = L_1 s_1 + L_2 s_{12}$$

(1) $x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos\theta_2$

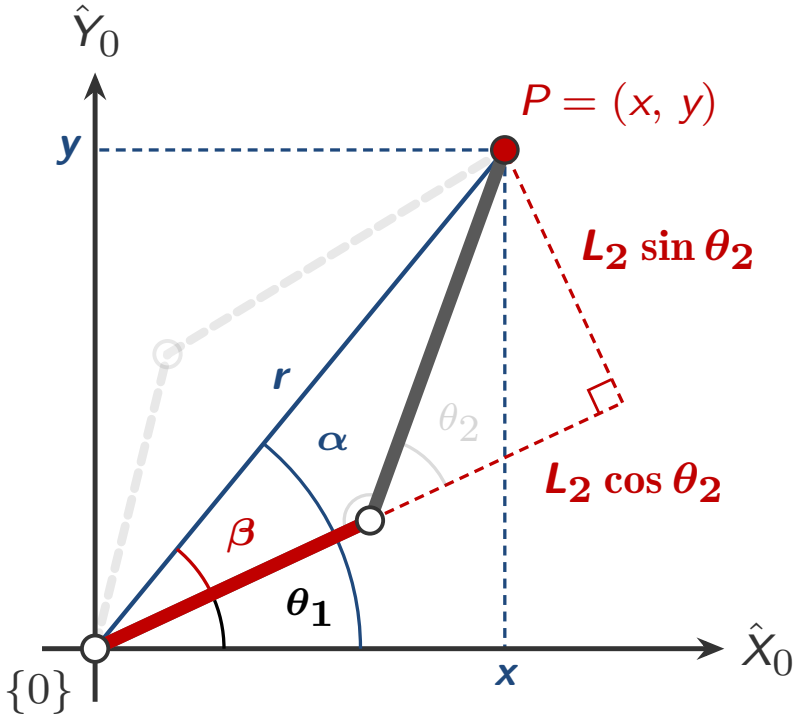
(2) $\cos\theta_2 = \dfrac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2}$

(3) $\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_2}$

$\theta_2 = \text{atan2}(\sin\theta_2,\ \cos\theta_2)$

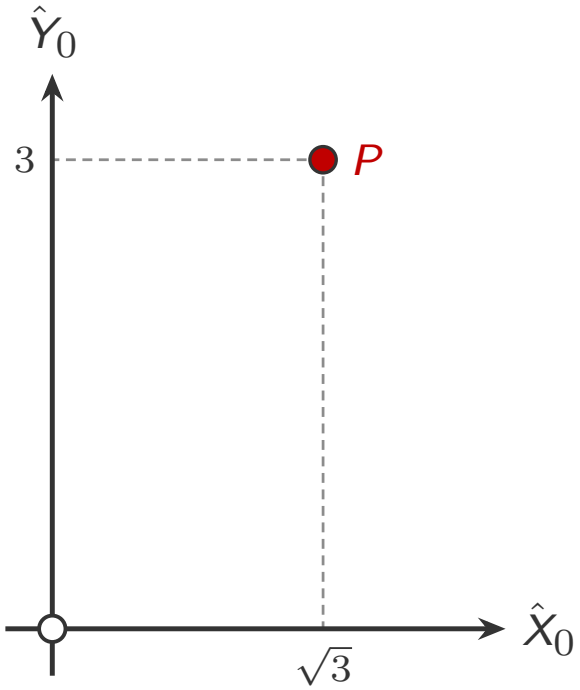
(4) $\boldsymbol{\theta_1 = \alpha - \beta}, \quad \boldsymbol{\alpha = \text{atan2}(y,\ x)}$

$\boldsymbol{\beta = \text{atan2}(L_2 \sin\theta_2,\ L_1 + L_2 \cos\theta_2)}$



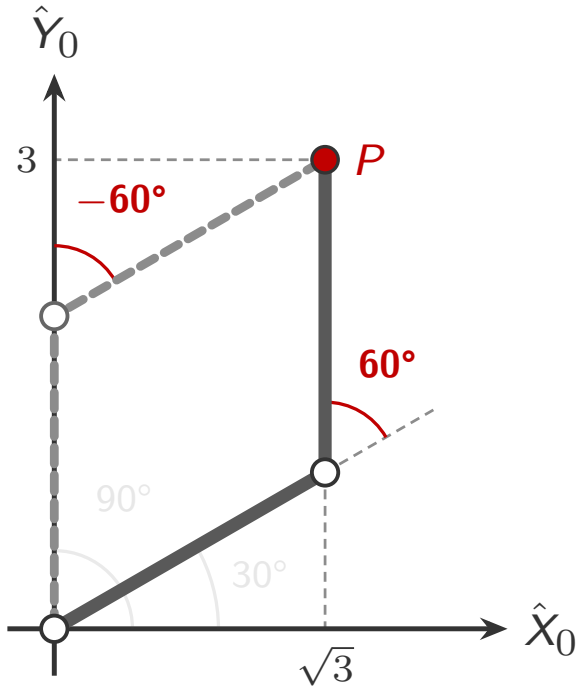
[읽는 법] β: 밑변 $L_1 + L_2\cos\theta_2$, 높이 $L_2\sin\theta_2$ 인 직각삼각형의 각.
팔꿈치 위 해는 $\sin\theta_2 < 0$ 이라 $\beta < 0$, $\theta_1 = \alpha - \beta > \alpha$ 이다.

예제 4-6 2링크 팔의 역기구학 (1/3)



링크 길이가 $L_1 = L_2 = 2$ 인 2링크 팔의 끝을 $P = (\sqrt{3},\ 3)$ 에 두려고 한다.
가능한 관절 각 (θ_1, θ_2) 를 모두 구하시오.

예제 4-6 2링크 팔의 역기구학 (2/3)



SOLUTION 4-6

▶ **(1)** $\cos\theta_2$ — $x^2 + y^2 = 3 + 9$

$$\cos\theta_2 = \frac{3+9-4-4}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

▶ **(2)** $\theta_2 = \text{atan2}(\sin\theta_2,\ \cos\theta_2)$

$$\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1-1/4} = \pm\sqrt{3}/2$$

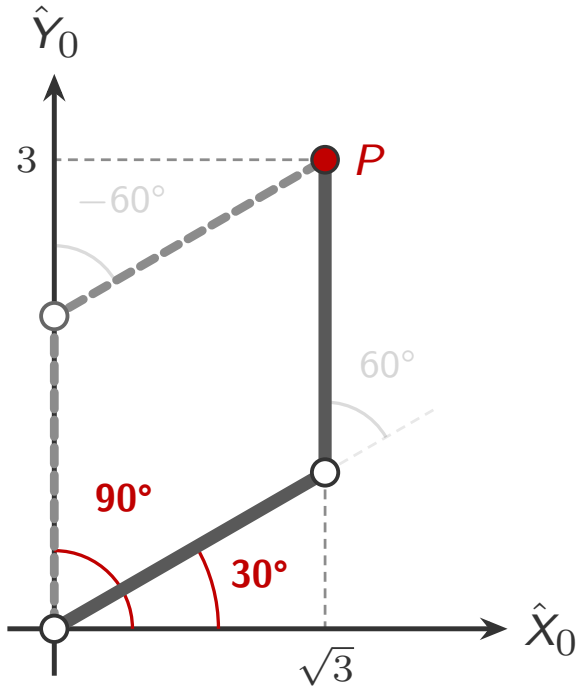
$$\theta_2 = \pm 60^\circ$$

▶ **(3)** $\alpha = \text{atan2}(y,\ x)$

$$\alpha = \text{atan2}(3,\ \sqrt{3}) = 60^\circ$$

[확인] $|\cos\theta_2| \le 1$ 이라 도달 범위 안이다.
$\theta_2 = 60^\circ$: 팔꿈치 아래(실선), $\theta_2 = -60^\circ$: 팔꿈치 위(점선).

예제 4-6 2링크 팔의 역기구학 (3/3)



SOLUTION 4-6

▶ **(4)** $\theta_2 = 60°$**:** $\theta_1 = \alpha - \beta = 60° - \beta$

$$\beta = \text{atan2}(2\sin 60°,\ 2 + 2\cos 60°)$$
$$= \text{atan2}(\sqrt{3},\ 3) = 30° \ \Rightarrow\ \theta_1 = 30°$$

▶ **(5)** $\theta_2 = -60°$**:** $\theta_1 = 60° - \beta$

$$\beta = \text{atan2}(2\sin(-60°),\ 2 + 2\cos(-60°))$$
$$= \text{atan2}(-\sqrt{3},\ 3) = -30° \ \Rightarrow\ \theta_1 = 90°$$

[검산] $(90°,\ -60°)$: $2\cos 90° + 2\cos 30° = \sqrt{3},\ \ 2\sin 90° + 2\sin 30° = 3.$
$(30°,\ 60°)$ 는 예제 4-5 이다. 두 해 모두 같은 P 에 닿는다.

Ch 4 정리

개념	식	번호
동차변환행렬	$${}^{A}_{B}T = \left[\begin{array}{c\|c} {}^{A}_{B}\mathbf{R} & {}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right]$$	(4.1)
연속 변환	$${}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}_{C}T$$	(4.4)
역변환	$${}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1} = \left[\begin{array}{c\|c} {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathsf{T}} & -{}^{A}_{B}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\,{}^{A}\mathbf{P}_{B\text{org}} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{array}\right]$$	(4.5)
변환 방정식	$${}^{U}_{0}T \cdot {}^{0}_{E}T \cdot {}^{E}_{G}T = {}^{U}_{D}T \cdot {}^{D}_{G}T$$	(4.7)
곱하는 위치	절대 $T_{\text{cum}} \leftarrow T_{\text{new}}\,T_{\text{cum}}$, 상대 $T_{\text{cum}} \leftarrow T_{\text{cum}}\,T_{\text{new}}$	(4.8)
순기구학	$${}^{0}_{E}T = \text{Rot}(Z,\theta_1)\,\text{Trans}(L_1,0,0)\,\text{Rot}(Z,\theta_2)\,\text{Trans}(L_2,0,0)$$	—
	원점 열 $x = L_1c_1 + L_2c_{12}$, $y = L_1s_1 + L_2s_{12}$	
역기구학	$\cos\theta_2 = (x^2+y^2-L_1^2-L_2^2)/(2L_1L_2)$	—
	$\theta_2 = \text{atan2}(\sin\theta_2,\ \cos\theta_2)$	
	$\theta_1 = \text{atan2}(y,\ x) - \text{atan2}(L_2\sin\theta_2,\ L_1 + L_2\cos\theta_2)$	

[확장] 링크가 많은 팔도 링크마다 변환을 정해 연속 변환 (4.4) 처럼 차례로 곱한다.